Лекция 12

Теор 5 (о завис-ти ф-ий) Пусть:

1) ф-ии $f_1, \dots, f_n$ диф-мы в окр-ти Ω_{M_0}

2) все частные произв-ые $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ непр в т. M_0

3) $\exists$ минор r-го порядка м-цы $\|f_x(M)\|$ отлич-ный от нуля в т. M_0 (базисный минор)

4) все ~~остальные~~ миноры $r+1$ порядка м-цы $\|f_x(M)\| \equiv 0$ в Ω_{M_0}

Тогда

1) r базисных ф-ий (у БМ) незав-мы в Ω_{M_0}

2) $\exists$ окр-ть $\omega_{M_0} \subset \Omega_{M_0}$, в кот-й $\forall$ ф-я y_i зависит от r базисных ф-ий

Зам-я 1) Утв-ие 1) т-мы 5 непоср-но вытекает из т-мы 4

2) Утв 2) т-мы 5 носит принципиально локальный характер

Пример $y_1(x_1, x_2, x_3)$, $y_2(-\text{"}-)$, $y_3(-\text{"}-)$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}_{M_0} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \\ \text{---} & \text{"} & \text{---} \\ & \dots & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}_{\text{в } \Omega_{M_0}} \equiv 0$$

$\Rightarrow$ 1) y_1, y_2 нез-мы в Ω_{M_0}

2) $\exists\, \omega_{M_0} \subset \Omega_{M_0}$, в кот-й $y_3 = \Phi(y_1, y_2)$

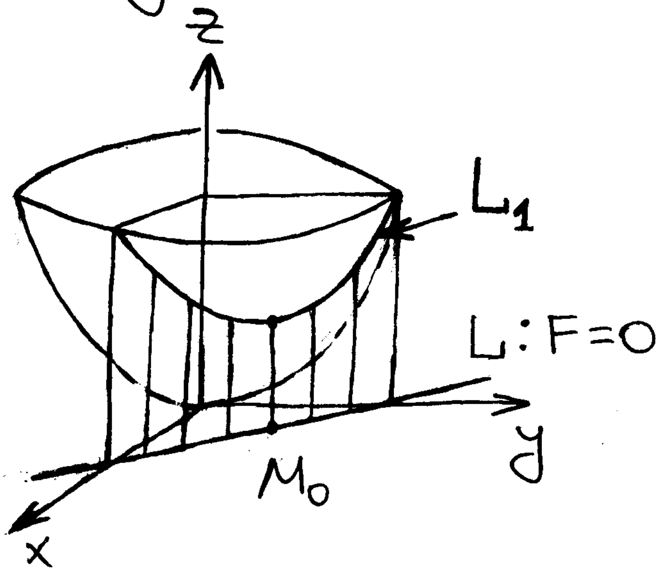
$(y_1 = \Phi_1(y_1, y_2) \equiv y_1,\ y_2 = \Phi_2(y_2) \equiv y_2)$

§4 Условный экстремум

Пример

$$\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \equiv f(x,y) \leftarrow \text{исслед-ая ф-ция} \\ 3x + 2y = 11 \Longleftrightarrow F(x,y) \equiv 3x + 2y - 11 = 0 - \text{условие} \end{cases}$$

связи (перем-х x и y)



$O(0,0)$ — лок-ый min ф-ции z

M_0 — усл-ый min z — т.е. min-ум ф-ции z **над** прямой $L: 3x+2y-11=0$

Если убрать усл-ие связи, то M_0 — не min

Наша з-ча научиться искать условный экстремум ф-ции $\cancel{\Phi} f$, не разрешая в явном виде усл-ия связи

Отметим, что $z_x(M_0), z_y(M_0) \neq 0$, т.е. $dz\big|_{M_0} \neq 0$

Метод Лагранжа

Суть метода состоит в замене

$z \to \Phi : \Phi_x(M_0), \Phi_y(M_0) = 0$

а именно

$z(x,y) \longmapsto \Phi(x,y;\lambda) = f + \lambda F$ – ф-я Лагранжа

параметр   множ-ль Лагранжа

$$\begin{cases} \Phi = x^2 + \cancel{y^2} 2y^2 + \lambda(3x+2y-11) \quad (+\lambda \cdot 0) \\ 3x+2y-11=0 \end{cases}$$

Над прямой L $\Rightarrow \Phi \equiv f = z$ (при $\forall \lambda$)

$\Rightarrow$ усл-ый экстремум ф-ии Φ явл-ся усл-ым экстремумом и для ф-ии z при $\forall$ значении λ

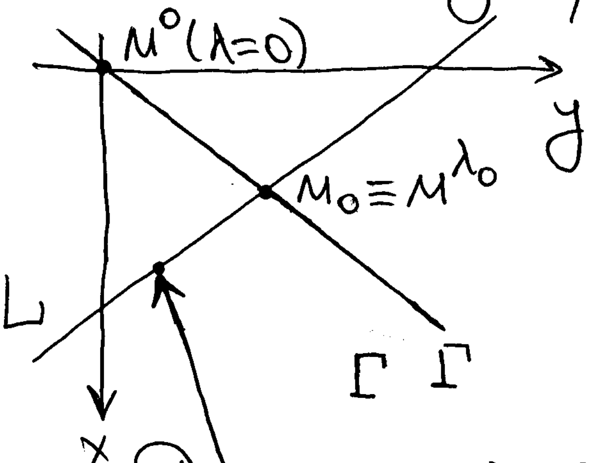
прокомментировать на языке графиков: графики ф-й Φ и z отличаются, но пересекаются по кривой L_1 и пр-ва xyz; параметр λ подбирают так, чтобы касат-я пл-ть к графику суммарной ф-ии Φ (сумма параболоида $z = x^2+2y^2$ и пл-ти $z = \lambda(3x+2y-11)$) была горизонтальной в т. M_0; при этом ф-ия Φ может

регулирует наклон пл-ти

и не иметь общего лок-го экстр-ма в т. M_0

(но, разум-ся, имеет усл-ый экстр-ум в ~~этой~~ точке)

I) Найдём точки возможного усл-го экстр-ма
Для этого подберём $\lambda = \lambda_0$: $d\Phi\big|_{M_0} \Longleftrightarrow$



$\Longleftrightarrow \Phi_x(M_0) = \Phi_y(M_0) = 0$

т.е. так, чтобы возм-ый локальный экстр-м совпал с возм-ым усл-ым экстр-ом

Для ост-ых точек такие λ подобрать не удастся! (в данной з-че)

Рассм-м с-му:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_x &= 2x + 3\lambda = 0 \\ \Phi_y &= 4y + 2\lambda = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= -\frac{3}{2}\lambda \equiv x(\lambda) \\ y &= -\frac{1}{2}\lambda \equiv y(\lambda) \end{aligned}\right\} -$$

– нек-ая кривая Γ с параметром λ (у нас прямая $x = 3y$)

$\{M(x(\lambda), y(\lambda)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \equiv \Gamma$ – мн-во точек возможного экстремума ф-ии Φ, отв-их разным λ

Чтобы найти λ_0, подставим $x(\lambda)$ и $y(\lambda)$ в условие связи: $3x(\lambda) + 2y(\lambda) - 11 = 0$

$$-\frac{9}{2}\lambda - \frac{2}{2}\lambda - 11 = 0$$

$\Rightarrow \underline{\lambda = -2} \equiv \lambda_0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}\lambda_0 = 3 \\ y = -\frac{1}{2}\lambda_0 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow M_0(3,1)$

Т.к. $M_0(x(\lambda_0), y(\lambda_0)) = M_0(3,1)$ – т-ка возм-го лок-го экстремума (~~т.е.~~ а значит в т. M_0 скорость изм-я Φ по всем напр-ям $=0$), то M_0 – и т-ка возм-го усл-го экстр-ма (в том смысле, что в т. M_0 скорость изм-я Φ вдоль кривой $L=0$)
в направлении

Итак, для нахож-я точек возм-го экстр-ма решают с-му

$$\begin{cases} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ F = 0 \ (\Leftrightarrow \Phi_\lambda = 0) \end{cases}$$

и находят $M_0(3,1)$ (в общем случае их может быть много)

II) Достаточные усл-ия усл-го экстремума

Рассм-м

$$d\Phi\big|_M = \Phi_x dx + \Phi_y dy = (2x+3\lambda)dx + (4y+2\lambda)dy$$

При вычислении $d^2\Phi\big|_M$ нужно учитывать, что $3x+2y-11=0$, т.е., что $y=y(x)$ (или $x=x(y)$)

$$\Rightarrow d^2\Phi\big|_M = 2dx^2 + 4dy^2 + \underbrace{\cancel{(4y+2\lambda)}}_{\Phi_y}d^2y$$

0 в т. M_0

Но $\Phi_y(M_0)=0$ (т.е. $d^2\Phi$ в т. M_0 вычис- | 12.6

ляется так, словно x и y незав-ые перем-ые

$\Rightarrow d^2\Phi|_{M_0}=2dx^2+4dy^2$ – пол опр КФ

$\Rightarrow M_0$ – т. лок min $\Rightarrow M_0$ и т. усл-го min ф-ии Φ

Важное замечание. Если бы, напр,

$d^2\Phi|_{M_0}=2dx^2-4dy^2$ – знакоперем КФ, то

M_0 не была точкой лок-го экстр-ма ф-ии Φ.

Однако она, тем не менее, может быть т-ой усл-го экстр-ма

Как проверить? Нужно учесть условие связи:

$F=3x+2y-11=0 \Rightarrow y=y(x) \Rightarrow dy=y'(x)dx$

Но если мы не знаем (в смысле не можем выразить) $y(x)$? Как найти $y'(x)$ (или $dy|_x$)?

Мы знаем $M_0(x_0,y_0)$, где $y_0=y(x_0) \Rightarrow$ Можем легко найти $dy|_{x_0}$

$F\equiv 0$ (при $y=y(x)$) $\Rightarrow dF\equiv 0$

$F_x dx+F_y dy=0$

$$dy|_{x_0}=\underbrace{-\frac{F_x(M_0)}{F_y(M_0)}}_{y'(x_0)}dx$$

В нашем случае $3x+2y-11=0$

$3dx+2dy=0 \Rightarrow dy=-\frac{3}{2}dx$

Т.о., если $d^2\Phi\Big|_{M_0}=2dx^2-4dy^2$, то для

$\tilde{\Phi}(x)\equiv\Phi(x,y(x);\lambda_0)$ получаем

$d^2\tilde{\Phi}\Big|_{x_0}=2dx^2-4dy^2\Big|_{x_0}=2dx^2-9dx^2=-7dx^2$ –

– отр опр КФ $\Rightarrow M_0(3,1)$ – т. усл-го $\max$
(но не усл-го $\min$!)

Обоснование метода Лагранжа в случае двух условий связи

$$\begin{cases} u=f(x,y,z)=f(M) \text{ – иссл-ая ф-ия} \\ \left.\begin{aligned} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{aligned}\right\}(*) \end{cases}$$

$m=3$ – число пер-х

$n=2$ – число связей

(n всегда должно быть $<m$, чтобы з-ча была корректной)

Положим $S\equiv\{M\in E^3 \mid \overbrace{F_1(M)=F_2(M)=0}^{\text{усл-ия связи}}\}$

Пусть ~~M_0~~ $u=f(M)$: $D_f\supset$ нек окр т. M_0

Опр Т. M_0 наз т. усл-го $\min$ ф-ии f при наличии связей $(*)$, если $M_0\in S$ и если $\exists\delta>0$:

$\forall M\in\Omega_{M_0}\cap S \Rightarrow f(M)\geq f(M_0)$