12.1

(2-): $d^2\Phi|_{x_0} = -2dx^2 - 4dy^2|_{x_0} + 0\cdot d^2y|_{x_0}$

$\Rightarrow d^2\Phi$ — отр опр КФ$(dx, dy) \Rightarrow$

$\Rightarrow M_0(3,1)$ — т. безусл max $\Phi \Rightarrow$

$\Rightarrow M_0$ — т. усл max $\Phi \Rightarrow M_0$ — т. усл max f

Зам Если бы

(2±): $d^2\Phi|_{x_0} = 2dx^2 - 4dy^2|_{x_0}$ — знакоперем КФ(dx, dy)

то M_0 — не т. безусл экстр $\Phi \not\Rightarrow M_0$ — не т. усл экстр Φ и f

А как выяснить? — Нужно подставить в (2±) $dy|_{x_0} = y'(x_0)dx$

Вычислим $dy|_{x_0}$, не находя $y(x)$: ~~для~~ ~~чего~~ ~~продиф~~ ~~равен~~ ~~условные~~ ~~связи~~:

$3x + 2y - 11 = 0 \quad \} d$

$3dx + 2dy = 0 \Rightarrow dy|_x = -\frac{3}{2}dx = dy|_{x_0} \Rightarrow$ (const)

~~$dy = -\frac{3}{2}dx = dy|_{x_0}$~~

$\Rightarrow d^2\Phi|_{x_0} = 2dx^2 \cancel{-9dx^2} - 4\frac{9}{4}dx^2 = -7dx^2$ — отр опр КФ(dx)

$\Rightarrow M_0(3,1)$ была бы т. усл min Φ и f

(но не т. безусл min Φ !!)

Метод Лагранжа для двух усл-й связи

$$\begin{cases} u = f(x,y,z) = f(M) & \text{— иссл-ая (на экстр-м) ф-ия} \\ F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \quad (*) \text{ — усл-я связи}$$

Обозн $S \equiv \{M \in E^3 \mid F_1(M) = F_2(M) = 0\}$ — нек кривая в пр-ве E^3 (ранее пр-я L)

Пусть $u = f(M)$: $D_f \supset$ окр т. M_0

Опр т. M_0 наз т. усл min ф-ии f при наличии связей $(*)$, если $M_0 \in S$ и если $\exists \delta > 0 : \forall M \in O_\delta(M_0) \cap S \Rightarrow f(M) \geq f(M_0)$

Теор 6 (о необх усл-х экстр) Пусть:

1) F_1, F_2 дифф в окр т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$
2) все ЧП ф-й F_i непр в т. M_0
3) $F_1(M_0) = F_2(M_0) = 0$, $\left.\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(y,z)}\right|_{M_0} \neq 0$
4) f дифф в окр т. M_0

Тогда M_0 — т. усл экстр $f \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в-ры $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{grad} F_1$, $\operatorname{grad} F_2$ — ЛЗ в т. M_0

(нап, что ЛЗ — лин-я зав-ть $\equiv$ компланар-ти)

12.3

Δ Рассм усл-я связи: $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ (*)

Усл 1)-3) теор 6 — это усл-я теор 3 ⟹:

а) $\exists Q(M_0)$, в кот с-ма (*) задает ! НВФ: $\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$

парал-д со стороной (x_0-d, x_0+d) по оси x

б) $y(x), z(x)$ дифф в $O_d(x_0)$

Опр Графиком НВФ $\{y(x), z(x)\}$ на (x_0-d, x_0+d) наз мн-во

$$\Gamma = \{M(x,y,z) \mid x\in(x_0-d,x_0+d),\ y=y(x),\ z=z(x)\} \subset Q(M_0)$$

— кривая в пр-ве E^3 (геом смысл)

Зам, что

по опр НВФ, зад-й в $Q(M_0)$

$$M(x,y,z)\in S \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} F_1(M)=F_2(M)=0 \\ + \text{т. } M\in Q(M_0) \end{matrix}\right\} \overset{\Leftarrow}{\Rightarrow} \begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \\ x\in(x_0-d,x_0+d) \end{cases}$$

в силу ! НВФ в $Q(M_0)$

Т.о. $M\in S\cap Q(M_0) \Leftrightarrow M\in\Gamma$, т.е. $S\cap Q(M_0)=\Gamma$

Нап, что по усл теор M_0 — т. усл экстр f ⟹

⟹ $\exists\delta>0: \forall M\in O_\delta(M_0)\cap S \Rightarrow f(M) \lesseqgtr f(M_0)$

Будем ~~считать~~ -ть, что $Q(M_0)$ мал ~~настолько~~ наст-ко, что $Q(M_0)\subset O_\delta(M_0)$. Тогда

$\forall$ т. $M(x,y,z) \in \underbrace{Q(M_0) \cap S}_{=\Gamma} \Rightarrow f(M) \lesseqgtr f(M_0)$

а значит $\Updownarrow$ по опр Γ

$$\left.\begin{aligned} &\forall\ x \in (x_0-d, x_0+d) \\ &y = y(x) \\ &z = z(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x,y,z) = f(x, y(x), z(x)) \equiv$$

$$\equiv \tilde{F}(x) \lesseqgtr f(x_0, y_0, z_0) \equiv \tilde{F}(x_0)$$

т.е. $\forall x \in O_d(x_0) \Rightarrow \tilde{F}(x) \lesseqgtr f(x_0)$

Тем самым мы уст-ли, что

M_0 − т. усл экстр $f(M) \underset{(\Leftarrow)}{\Longrightarrow} x_0$ − т. безусл экстр $\tilde{F}(x)$

$$\Rightarrow \frac{d\tilde{F}}{dx}(x_0) = 0 \quad (1)$$

Кроме того $\left\{\begin{aligned} &\tilde{F}_1(x) \equiv F_1(x, y(x), z(x)) \overset{\text{при } x \in O_d(x_0)}{\equiv} 0 \\ &\tilde{F}_2(x) \quad \text{—} \quad '' \quad \text{—} \quad \equiv 0 \end{aligned}\right\} \left.\frac{d}{dx}\right|_{x_0}$

$$\Rightarrow \frac{d\tilde{F}_i}{dx}(x_0) = 0 \quad (2)$$

Из (1), (2) в силу теор о дифф сл-й ф-ции пол-м

$$\begin{cases} f_x(M_0)\cdot 1 + f_y(M_0)\cdot y_x(x_0) + f_z(M_0)\cdot z_x(x_0) = 0 \\ F_{1x}(M_0)\cdot 1 + \quad \text{—} \quad '' \quad \text{—} \quad = 0 \\ F_{2x}(M_0)\cdot 1 + \quad \text{—} \quad '' \quad \text{—} \quad = 0 \end{cases}$$

или
$$\begin{pmatrix} f_x \\ F_{1x} \\ F_{2x} \end{pmatrix}_{M_0} \cdot 1 + \begin{pmatrix} f_y \\ F_{1y} \\ F_{2y} \end{pmatrix}_{M_0} \cdot y_x(x_0) + \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{M_0} \cdot z_x(x_0) = 0$$

12.5

$$\Rightarrow \text{эти ст л3} \Rightarrow \begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \\ F_{2x} & F_{2y} & F_{2z} \end{vmatrix}_{M_0} \equiv 0 \Rightarrow \text{стр л3}$$

$f_x\ f_y\ f_z = \operatorname{grad} f$; БМ

т.е. $\operatorname{grad} f|_{M_0}$, $\operatorname{grad} F_1|_{M_0}$, $\operatorname{grad} F_2|_{M_0}$ — л3 $\triangle$

Зам т.к. $\begin{vmatrix} F_{1y} & F_{1z} \\ F_{2y} & F_{2z} \end{vmatrix}_{M_0} \neq 0$, то по теор о БМ

$$\Rightarrow \operatorname{grad} f|_{M_0} = \lambda_1^0 \operatorname{grad} F_1|_{M_0} + \lambda_2^0 \operatorname{grad} F_2|_{M_0}$$

Опр Т-ки $M_0 \in S$, в кот в-ры $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{grad} F_1$ и $\operatorname{grad} F_2$ — л3, наз т-ми возм усл экстр ф-ии f

Т.о., из того, что M_0 — т. возм усл экстр f

$$\Rightarrow \operatorname{grad} \underbrace{(f - \lambda_1^0 F_1 - \lambda_2^0 F_2)}_{\equiv \Phi}\Big|_{M_0} = \operatorname{grad} \Phi|_{M_0} \equiv$$

$$\equiv \{\Phi_x(M_0), \Phi_y(M_0), \Phi_z(M_0)\} = \vec{\theta}$$

$\Phi_x(M_0) = 0$, $\Phi_y(M_0) = 0$, $\Phi_z(M_0) = 0$ $\Rightarrow$ M_0 — т. возм безусл экстр Φ

Метод Л-жа:

$$f(x,y,z) \longmapsto \Phi(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2) = f - \underbrace{\lambda_1}_{} F - \lambda_2 F$$

ф-я Л-жа; мн-ли Л-жа

I) Зам, что: M_0 — т. возм усл экстр f $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\exists\, \underbrace{\lambda_1 \equiv \lambda_1^0, \lambda_2 \equiv \lambda_2^0}_{\text{ещё предстоит найти}}$: M_0 — т. возм безусл ~~экстр Φ~~ экстр Φ

12.6

$\Rightarrow$ для поиска т-к $M_0(x_0,y_0,z_0)$ возм усл экстр f имеем

$$\operatorname{grad}\mathcal{L}\big|_{M_0}=0 \to \begin{cases}\mathcal{L}_x(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2)=0\\ \mathcal{L}_y(\ )=\mathcal{L}_z(\ )=0\end{cases}$$
$$M_0\in S \to \underset{\mathcal{L}_{\lambda_1}}{F_1(x,y,z)}=\underset{\mathcal{L}_{\lambda_2}}{F_2(\ )}=0$$

5 ур-ий с 5 неизв

II) Зам, что т.к. на мн-ве $S \Rightarrow F_1=F_2\equiv 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{L}\equiv f-\lambda_1^0\cdot F_1-\lambda_2^0\cdot F_2\equiv f$, то

M_0 – т. усл экстр $f \equiv M_0$ – т. усл экстр $\mathcal{L}$

(безусл экстр-ма у $\mathcal{L}$ может и не быть – см. пример выше)

При этом проверка дост услов экстр в т. M_0 проще для $\mathcal{L}$, чем для f (т.к. $\mathcal{L}_x=\ldots=0$ – см. зам ниже)

Обозн $\mathcal{L}(x,y,z;\lambda_1^0,\lambda_2^0)\equiv\mathcal{L}(x,y,z)$

$$\mathcal{L}(x,\underbrace{y(x),z(x)}_{\text{НВФ из д-ва теор 6}})\equiv\tilde{\mathcal{L}}(x),\ x\in O_\delta(x_0)$$

Теор 6+ (о дост усл-х экстр) Пусть:

1) в т. $M_0(x_0,y_0,z_0)$ вып усл 1)–4) теор 6

2) f, F_1, F_2 2-ды диф в т. M_0

3) M_0 – т. возм усл экстр f

4) $d^2\tilde{\mathcal{L}}(dx)\big|_{x_0}$ – пол опр КФ

$\Rightarrow M_0$ – т. усл min f &6