Лекция 13

Введём ф-ию Лагранжа

$\Phi \equiv f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$, λ_i – мн-ли Лагранжа

$\Rightarrow$ усл экстр-м Φ совп-ет с усл экстр-ом u

Теор 6 (о необх-х усл-х экстр-ма) Пусть:

1) F_1, F_2 диф в окр т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$

2) все ЧП ф-ий F_i непр в т. M_0

3) $F_1(M_0) = F_2(M_0) = 0$, $\left.\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}\right|_{M_0} \neq 0$

4) $f(M)$ диф в т. M_0

5) M_0 – т. усл-го экстр-ма ф-ии u

Тогда $\exists\ \lambda_1 = \lambda_1^0,\ \lambda_2 = \lambda_2^0$:

автом-ки в силу 3) или 5)

$$\underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(M_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}(M_0)}_{\text{т.е. } d\Phi|_{M_0} = 0} = 0 \ (= F_1(M_0) = F_2(M_0)) \qquad (*)$$

~~M_0 – усл экстр $\Rightarrow M_0 \notin D$~~

Зам 1 Если $M_0(x_0, y_0, z_0)$ неизвестна, то =-ва $(*)$ можно интерпрет-ть как с-му 5 ур-ий для 5 неизв-х: $x_0, y_0, z_0, \lambda_1^0$ и λ_2^0

Зам 2 Для краткости мы не указываем явно на зависимость Φ от λ_1 и λ_2. Если же использовать развёрнутую запись: $\Phi(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)$, то соотнош-ям (*) с учётом того, что $\Phi_{\lambda_1}=F_1$, $\Phi_{\lambda_2}=F_2$, можно придать след-ий смысл:

$$d\Phi\big|_{\tilde{M}_0}=\Phi_x(\tilde{M}_0)dx+\Phi_y(\tilde{M}_0)dy+\Phi_z(\tilde{M}_0)dz+$$
$$+\Phi_{\lambda_1}(\tilde{M}_0)d\lambda_1+\Phi_{\lambda_2}(\tilde{M}_0)d\lambda_2\equiv 0$$

где $\tilde{M}_0=\tilde{M}_0(x_0,y_0,z_0,\lambda_1^0,\lambda_2^0)$

Зам 3 В усл-ях теоремы x_0,y_0,z_0 – известные (заданные) величины, причём такие, что $F_1(x_0,y_0,z_0)=F_2(x_0,y_0,z_0)=0$. Поэтому ~~тео~~ по-~~рема но~~ лучается, что теорема отвечает на вопрос: существуют ли λ_1,λ_2, при которых $d\Phi\big|_{M_0}=0$? Т.о. мы имеем, ~~дает~~ полож-й ответ на вопрос о разрешимости с-мы трёх ур-ий отн-но двух неизв-х (разум-ся, причина этой разр-ти кроется в том, что M_0 – т. усл-го экстр-ма, для других точек мн-ва S указанная с-ма, вообще говоря, неразрешима).

Зам 4 Ур-ия $\left.\begin{matrix}\Phi_x=0\\ \Phi_y=0\\ \Phi_z=0\end{matrix}\right\}$ как правило опред-ют !-ое реш-ие (хотя могут опр-ять и много реш-й или не опр-ть ни одного), но зависящее от двух парам-в λ_i (иными словами, опр-ют совокупность неявных ф-ий α от пер-ых λ_1 и λ_2):

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x(\lambda_1, \lambda_2) \\ y = y(\lambda_1, \lambda_2) \\ z = z(\lambda_1, \lambda_2) \end{cases} \Rightarrow M(x(\lambda_1,\lambda_2), y(\lambda_1,\lambda_2), z(\lambda_1,\lambda_2))$$

?: Найдутся ли $\lambda_1 = \lambda_1^0$ и $\lambda_2 = \lambda_2^0$:

$$M(x(\lambda_1^0,\lambda_2^0), y(\lambda_1^0,\lambda_2^0), z(\lambda_1^0,\lambda_2^0)) = M_0(x_0, y_0, z_0)$$

Теорема даёт положит-й ответ

Интерпретации у зам 3 и 4 — два взгляда на один и тот же процесс (комментировать заранее — ещё на стадии примера с одним усл-ем связи, а здесь уже повторять)

Δ Рассм-м усл-я связи

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$ — с-ма ур-ий неявных ф-ий

якобиан по $x, y \neq 0$

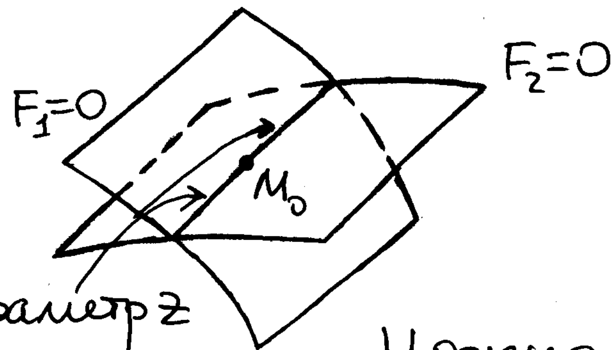
Усл-ия 1)-3) — усл-я теор 3 о существ-ии совок-ти неявных ф-ий:

$\Rightarrow \exists\, \omega_{M_0}: \begin{cases} x=\varphi(z) \\ y=\psi(z) \end{cases}$ опр-ют нек-ю кривую L в пр-ве xyz

причём эти ф-ии опр и диф в нек окр-ти т-ки $z=z_0$

Зам φ и ψ могут и не выр-ся в эл-х ф-иях

Геом смысл



$M_0(x_0,y_0,z_0)$, где $x_0=\varphi(z_0)$, $y_0=\psi(z_0)$

Можно считать также, что $L: \begin{cases} z=t\equiv\chi(t) \\ x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$

Т.о., z — незав-ся перем-я, x и y — ф-ии z

$$\Rightarrow \Phi=\Phi(x,y,z)=\Phi(x(z),y(z),z)\equiv\tilde{\Phi}(z) \overset{(**)}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow$ (по опр-ию усл-го экстр-ма) з-ча об условном экстр-ме ф-ии Φ сводится к з-че о локальном (безусл-ом) экстр-ме ф-ии $\tilde{\Phi} \Rightarrow$

$\Rightarrow d\tilde{\Phi}\big|_{z_0} = \Phi_x(M_0)dx\big|_{z_0} + \Phi_y(M_0)dy\big|_{z_0} +$

$+ \Phi_z(M_0)dz \equiv 0 \quad (\forall dz)$

inv-ть формы 1-го диф-ла (dx и dy – диф-лы ф-ций)

Выберем λ_1 и λ_2:

$$\begin{cases} \Phi_x(M_0) = f_x(M_0) + \lambda_1 F_{1x}(M_0) + \lambda_2 F_{2x}(M_0) = 0 \\ \Phi_y(M_0) = f_y(M_0) + \lambda_1 F_{1y}(M_0) + \lambda_2 F_{2y}(M_0) = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{1x} & F_{2x} \\ F_{1y} & F_{2y} \end{vmatrix}_{M_0} = \text{транспонированному опр-лю } \frac{D(F_1, F_2)}{D(x,y)} \neq 0 \text{ (см усл-ие 3)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по формулам Крамера

$$\lambda_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \equiv \lambda_1^0, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \equiv \lambda_2^0$$

Но ещё есть $\Phi_z(M_0)$!

Вернёмся к $d\tilde{\Phi}\big|_{z_0}$

$$d\tilde{\Phi}\big|_{z_0} = \underbrace{\cancel{\Phi_x(M_0)}}_{0}dx\big|_{z_0} + \underbrace{\cancel{\Phi_y(M_0)}}_{0}dy\big|_{z_0} + \Phi_z(M_0)dz = 0$$

dz – незав-я перем $\Rightarrow$ беря $dz \neq 0$, получаем, что $\Phi_z(M_0) = 0$

Итак, $\exists\, \lambda_1 = \lambda_1^0, \lambda_2 = \lambda_2^0 : \begin{cases} \Phi_x(M_0) = 0 \\ \Phi_y(M_0) = 0 \\ \Phi_z(M_0) = 0 \end{cases}$ чтд

$\not\Delta$

Опр Т. M_0: $\exists \lambda_1 = \lambda_1^0, \lambda_2 = \lambda_2^0$: $\Phi_x = \Phi_y = \Phi_z = F_1 = F_2 = 0$ **13.6**

– т-ки возможного условного экстр-ма

Теор 6+ (дост-ые усл-я экстр-ма) Пусть:

1) $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – т. возм-го усл-го экстр-ма
2) в т. M_0 вып-ны усл-я 1)–3) теор 6
3) $f(M)$ диф в нек окр т. $M_0(x_0, y_0)$
4) $f(M)$, $F_1(M)$, $F_2(M)$ 2-ды диф в т. M_0
5) $d^2\tilde{\Phi}(dz)\big|_{z_0} \equiv \tilde{\Phi}_{zz}(z_0)dz^2$ – пол опр КФ

см (**)

$\Rightarrow M_0$ – т-ка усл-го min-ма ф-ии u

Зам Пол опр $\Leftrightarrow \tilde{\Phi}_{zz}(z_0) > 0$

Δ Усл-ый экстр-м ф-ии Φ (а значит и u) – лок-ый экстр-м ф-ии $\tilde{\Phi}$. Но тогда утв-ие теоремы сразу же $\Leftarrow$ из теор о дост-х усл-х локального экстремума ∇

О вычислении $d^2\tilde{\Phi}\big|_{z_0}$

(**) $\tilde{\Phi}(z) \equiv \Phi(x(z), y(z), z)$

Но мы можем не знать явных выр-ий

$d^2\tilde{\Phi}\big|_{z_0} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{в т. } M_0}}{\Phi_{xx}} dx^2 + \Phi_{yy}dy^2 + \Phi_{zz}dz^2 +$

$+2\Phi_{xy}dxdy + 2\Phi_{yz}dydz + 2\Phi_{zx}dzdx +$

$+[\cancel{\Phi_x}d^2x + \cancel{\Phi_y}d^2y + \Phi_z \cancel{d^2z}]$ ← "портит" inv-ть формы

0 в т. M_0 0 0

т.к. z – незав-ая пер-ая

т.к. M_0 – т. возм усл экстр-ма

(впрочем $\Phi_z(M_0)$ также $=0$, поэтому величина d^2z роли не играет)

Зам нап, что на самом деле inv-тью формы обладает всё приведённое выр-ие для $d^2\Phi$.

Теперь надо учесть, что x и y ~~ф-ии z~~ рассм-ся как ф-ии z, а значит dx и dy (в т. z_0) – лин-ые ф-ии диф-ла dz:

$$dx = x'(z_0)dz, \quad dy = y'(z_0)dz$$

Но мы, вообще говоря, не знаем явных выр-ий для $x(z)$ и $y(z)$, а потому (в.г.) не можем непосредственно опр-ть $x'(z_0)$ и $y'(z_0)$.

В таком случае нам помогает след-й нехитрый приём

Подставив (неизв-ые нам) $x(z)$ и $y(z)$ в ур-ие связи, придём к двум тождествам отн-но пер-ой z:

$$\left.\begin{cases} F_1(x(z),y(z),z)\equiv 0 \\ F_2(x(z),y(z),z)\equiv 0\end{cases}\right| \frac{d}{dz} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{1x}\,dx + F_{1y}\,dy = -F_{1z}\,dz \\ F_{2x}\,dx + F_{2y}\,dy = -F_{2z}\,dz\end{cases}$$

Подставляем коорд-ты т-ки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и по формулам Крамера (с учётом того, что опред-тель Δ с-мы, равный $\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)}$, согласно одному из треб-ий теоремы отличен от нуля) имеем

$$\begin{cases} dx\big|_{z_0} = \square\, dz \\ dy\big|_{z_0} = \square\, dz\end{cases} \Rightarrow d^2\Phi\big|_{z_0} = \Phi_{xx}\,dx^2 + \ldots =$$

$$= \underbrace{\boxed{}}_{\tilde{\Phi}_{zz}(M_0)}\, dz^2$$

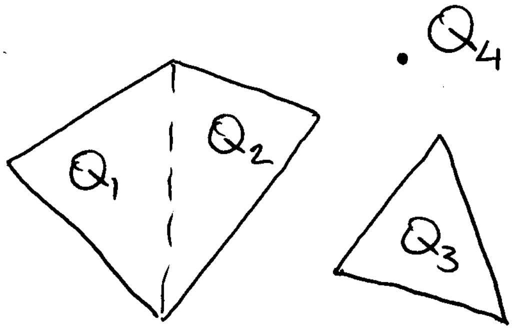
Глава XI Кратные $\int$-лы

§1 Понятия площади и объёма

Площадь плоской фигуры

Опр Мн-во $Q \subset E^2$ наз-ся многоугольнов фигуров (МФ), если оно представимо, в виде объединения конечного числа Δ-ов и/или точек на пл-ти E^2, т.е.

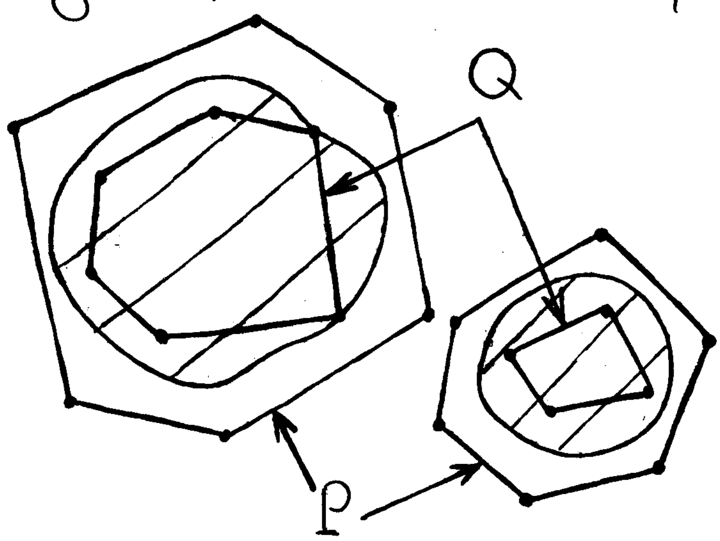
$Q = Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$, Q_i – Δ-ки или точки



← Пример мн-ва Q

Зам Мн-во Q не обязат-но явл-ся связным

Пусть G – $\forall$ огр-ое мн-во $\subset E^2$ (не обязат-но связное) $\equiv$ плоская фигура



Рассм МФ Q и P:

$Q \subset G \subset P$

вписана в G

описана около G

и обозначим через

$\{Q\} \equiv \{$мн-во МФ $Q \mid Q \subset G\}$

$\{P\} \equiv \{$мн-во МФ $P \mid P \supset G\}$

Т.к. $G \neq \emptyset \Rightarrow \exists Q \subset G$ (напр $Q =$ точке)

$\Rightarrow \{Q\}$ – непусто

Т.к. G - огр $\Rightarrow \exists P \supset G \Rightarrow \{P\}$ - непусто | 13.10

Будем считать, что нам изв-но понятие площади Δ-ка:

$S(\Delta)$ - площадь Δ-ка (известна)

S(точки) $\equiv 0$

$\Rightarrow$ нам известна $S(М\Phi)$

Рассм-м числовые мн-ва

$\{S(Q)\} \equiv \{S(Q) \mid Q \in \{Q\}\}$

$\{S(P)\} \equiv \{S(P) \mid P \in \{P\}\}$

$\forall Q, P: Q \subset G \subset P \Rightarrow Q \subset P \Rightarrow$

$\Rightarrow S(Q) \leq S(P) \Rightarrow$ т.е. площ-ю $\forall$ фигуры P

$\{S(Q)\}$ - огр-но сверху $(\forall S(P))$

$\{S(P)\}$ - огр-но снизу $(\forall S(Q))$

Получается, что $\{S(Q)\}$ - непустое + огр сверху

$\Rightarrow \exists \sup\{S(Q)\}$

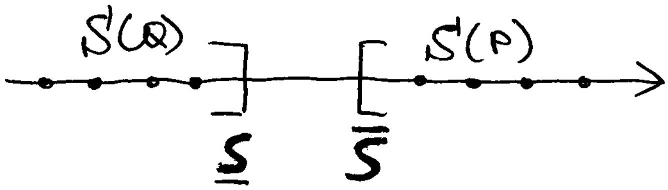
Ан-но $\exists \inf\{P(Q)\}$

Опр $\sup\{S(Q)\} \equiv \underline{S}$ - нижняя площадь G (внутр-яя)

$\inf\{S(P)\} \equiv \overline{S}$ – верхняя —и— (внешняя)

$\underline{S}$ и $\overline{S}$ всегда $\exists$-ют! (согласно вышесказанному)

Утв $\underline{S} \le \overline{S}$



Δ $S(Q) \le S(P)$ $\forall Q, P: Q \subset P$, а значит $\underline{S} \le \overline{S}$ ∇

Опр Плоская фигура G наз-ся квадрируемой (по Жордану), если $\underline{S} = \overline{S}$. При этом $\underline{S} = \underbrace{\overline{S}}_{\equiv S} \equiv S(G)$ – площадь G

Теорема 1 (критерий квадр-сти)

Квадр-сть $G \overset{(*)}{\Longleftrightarrow}$ $\boxed{\begin{array}{l}\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \text{ МФ } Q^* \text{ и } P^*: \\ Q^* \subset G \subset P^* \text{ и } S(P^*) - S(Q^*) < \varepsilon\end{array}}$

критерий квадр-ти (*) в узком смысле