$\Rightarrow M_0$ – т. усл min f (M_0 – т. возм безусл экстр Φ) 13.1

Δ M_0 – т. возм усл экстр $f \Rightarrow \operatorname{grad} \Phi|_{M_0} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{\Phi}'(x_0) = \underset{\overset{\parallel}{0}}{\Phi_x(M_0)} + \underset{\overset{\parallel}{0}}{\Phi_y(M_0)} \cdot y'(x_0) + \underset{\overset{\parallel}{0}}{\Phi_z(M_0)} \cdot z'(x_0) = 0$

$\Rightarrow x_0$ – т. возм безусл экстр $\tilde{\Phi}(x)$

Тогда из пол опр $d^2\tilde{\Phi}|_{x_0} \Rightarrow x_0$ – т. безусл min $\tilde{\Phi}(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow M_0(x_0, y_0, z_0)$ – т. усл min $\Phi(x,y,z) \Rightarrow$

см. Δ-во теор 6 $\Rightarrow M_0$ – т. усл min $f(x,y,z)$ Δ

Зам О выр-ии $d^2\tilde{\Phi}(dx)|_{x_0}$

$d^2\tilde{\Phi}|_{x_0} = [\underset{\text{в т. } M_0}{\Phi_{xx}} dx^2 + \Phi_{yy} dy^2|_{x_0} + \Phi_{zz} dz^2|_{x_0} +$

$+ 2\Phi_{xy} dx\, dy|_{x_0} + \dots] + \underset{\overset{\parallel}{0}}{\Phi_y} d^2y|_{x_0} + \underset{\overset{\parallel}{0}}{\Phi_z} d^2z|_{x_0}$ в т. M_0

Вычислим $dy|_{x_0}, dz|_{x_0}$: в т. M_0 в т. x_0

$\left\{\begin{array}{l} F_1(x, y(x), z(x)) \equiv 0 \\ F_2(x, y(x), z(x)) \equiv 0 \end{array}\right\} d \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_{1y} dy + F_{1z} dz = -F_{1x} dx \\ F_{2y} dy + F_{2z} dz = -F_{2x} dx \end{array}\right.$

т.к. $\frac{D(F_1, F_2)}{D(y,z)}\Big|_{M_0} \neq 0, \overset{\text{TC}}{\Rightarrow}$ по ~~форм-м~~ ф-м Крамера $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} dy|_{x_0} = \square\, dx \\ dz|_{x_0} = \square\, dx \end{array}\right. \Rightarrow d^2\tilde{\Phi}|_{x_0} = \underset{\tilde{\Phi}''(x_0)}{\boxed{}}\, dx^2$

Глава XI Кратные ∫-лы

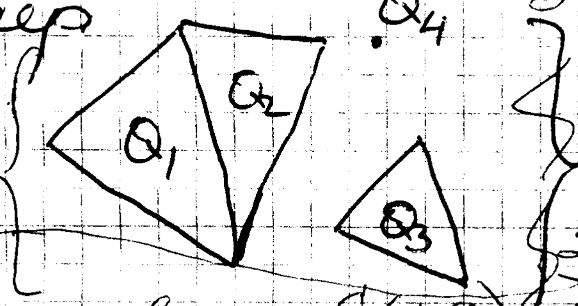
§1 Понятия площади и объёма

Площадь плоской фигуры

Опр мн-во $Q \subset E^2$ наз многоуг-й фигурой (МФ), если оно предст-мо в виде

$Q = Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$, Q_i – Δ-ки и/или ~~точки~~ т-ки $\subset E^2$
замкнутые

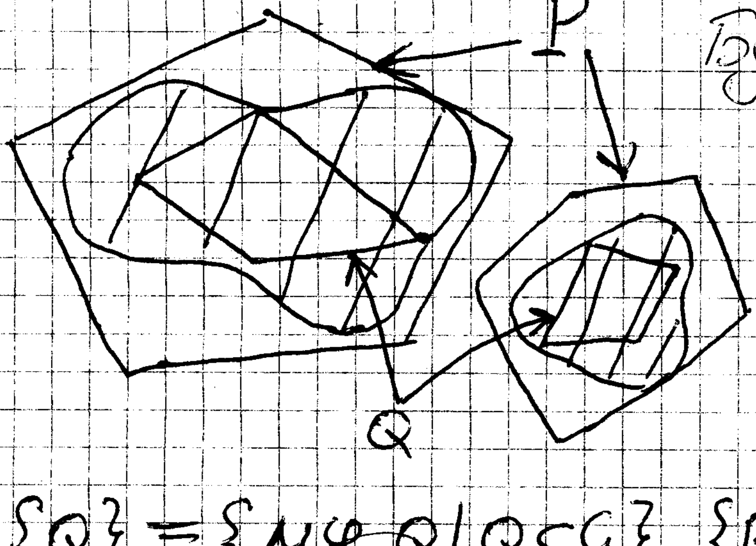
Пример



Будем сч-ть, что
1) нам изв $S(\Delta)$ – площадь Δ-ка
2) $S(\text{точки}) \equiv 0$

$\Rightarrow$ нам изв-на $S(\text{МФ})$

Пусть $G \neq \varnothing$ – $\forall$ огр мн-во $\subset E^2 \equiv$ плоская фигура



Будем рассм МФ Q и P:
$Q \subset G \subset P$
впис в G
опис около G

Обозн-м

$\{Q\} \equiv \{\text{МФ } Q \mid Q \subset G\}$, $\{P\} \equiv \{\text{МФ } P \mid P \supset G\}$

Т.к. $G \neq \varnothing \Rightarrow \exists Q \subset G \Rightarrow \{Q\} \neq \varnothing$

Т.к. G-огр $\Rightarrow \exists P \supset G \Rightarrow \{P\} \neq \varnothing$

Будем сч-ть, что: 1) нам изв $S(\Delta)$ – площадь Δ-ка
2) $S(\text{точки}) \equiv 0$

$\{S(Q)\} \equiv \{S(Q) \mid Q - \text{МФ} \subset G\} \neq \varnothing$ [т.к. у $G \neq \varnothing \Rightarrow \exists Q \subset G$ 13.3

$\{S(P)\} \equiv \{S(P) \mid P - \text{МФ} \supset G\} \neq \varnothing$ [т.к. у огр $G \Rightarrow \exists P \supset G$

на предыд стр

~~$\{S(Q)\} = \{S(Q) \mid Q \in \{Q\}\}$, $\{S(P)\} \equiv$ —"—~~

Зам, что $\forall Q, P: Q \subset G \subset P \Rightarrow Q \subset P \Rightarrow$

$\Rightarrow S(Q) \leq S(P) \Rightarrow$

$\{S(Q)\}$ – огр сверху $\forall S(P)$

$\{S(P)\}$ – огр снизу $\forall S(Q)$

Т.о. $\{S(Q)\} \neq \varnothing$ + огр сверху $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \sup\limits_{Q \subset G} \{S(Q)\} \equiv \underline{S}(G)$ – нижняя площадь G

Ан-но $\exists \inf\limits_{P \supset G} \{S(P)\} \equiv \overline{S}(G)$ – верхняя пл-дь G

Утв $\underline{S}(G) \leq \overline{S}(G)$

$S(Q)$] [$S(P)$

$\underline{S}(G) \leq \overline{S}(G)$

Опр Плоская фигура G наз квадрир-ой (по Жордану), если $\underline{S}(G) = \overline{S}(G)$. При этом

$\underline{S}(G) = \overline{S}(G) \equiv S(G)$ – площадь G

Теор 1 (Кр-ий квадр-ти)

Квадр-ть $G \iff$ (*)
$$\boxed{\begin{array}{l}\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \text{ МФ } Q^* \text{ и } P^*: \\ Q^* \subset G \subset P^* \text{ и } S(P^*) - S(Q^*) \leq \varepsilon\end{array}}$$

13.4

$\Delta 1)$ Кв-ть $G \Rightarrow$ Кр-ий $(*)$

Кв-ть $G \Rightarrow \underline{S}^{(G)} = S^{(G)} = \overline{S}^{(G)}$

$\underline{S}^{(G)} = \sup\limits_{Q \subset G} S(Q)$, $\overline{S}^{(G)} = \inf\limits_{P \supset G} S(P)$

$S(Q)$, $S(P)$, $\underline{S} = \overline{S}$

По опр sup

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists Q^* \subset G : S(Q^*) > S^{(G)} - \varepsilon/2$

$-S(Q^*) < -S_{(G)} + \varepsilon/2 \quad (1)$

По опр inf

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists P^* \supset G : S(P^*) < \overline{S}^{(G)} + \varepsilon/2 \quad (2)$

$(1)+(2)$ получаем, что

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists$ МФ $Q^*, P^* : Q^* \subset G \subset P^*$ и

$S(P^*) - S(Q^*) < \varepsilon \quad \blacktriangle 1)$

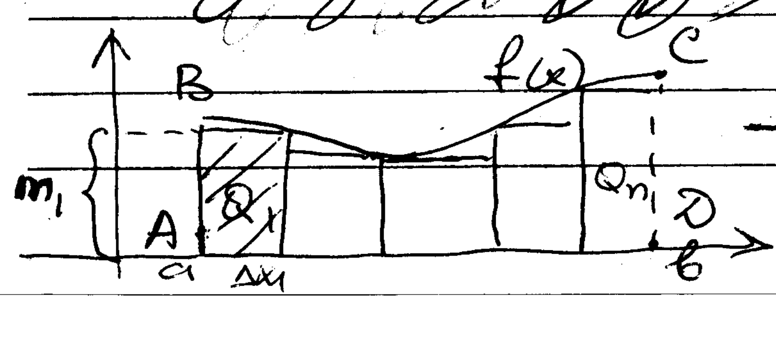
$\Delta 2)$ Кр-ий $(*) \Rightarrow$ Кв-ть G

Согл-но $(*)$ $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists Q^*, P^* : Q^* \subset G \subset P^*$ и

$\underbrace{S(Q^*) \le \underline{S}^{(G)} \le \overline{S}^{(G)} \le S(P^*)}_{< \varepsilon}$

$\Rightarrow 0 \le \overline{S}^{(G)} - \underline{S}^{(G)} < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \underline{S}^{(G)} = \overline{S}^{(G)} \Rightarrow G$ - кв-ма

$\blacktriangle 2)$



— ABCD - крив-ая трапеция ABCD

Теор 2 (о кв-ти крив-ой трапеции) 13.5

$f(x) - \int_a^b$-ма $\Rightarrow$ 1) $G \equiv ABCD$ − кв-ма

2) $S_{ABCD} = \int_a^b f(x)dx$

Δ1) Нап, что $\int$ ст$\,f \Rightarrow$ Кр-ий 1 $\int$-ти:

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists T^*[a,b]: \underbrace{\underline{S}(T^*) - \overline{S}(T^*)}_{\text{суммы Дарбу}} < \varepsilon$

$\overline{S}(T^*) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} S(Q_i) = S(Q^*)$,

где $Q^* = Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$ − "ступенчатая" МФ $\subset ABCD$

Ан-но $\underline{S}(T^*) = S(P^*)$, P^* − "ступ-ая" МФ $\supset ABCD$

Т.о. $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists$ МФ Q^* и P^*:
$Q^* \subset ABCD \subset P^*$ и $S(P^*) - S(Q^*) < \varepsilon$] Крит (*) кв-ти

$\Rightarrow ABCD$ − кв-ма Δ1)

Δ2) Д-м, что $\underbrace{S_{ABCD}}_{\equiv S} = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\equiv I}$,

~~Нап, что~~ Пусть T^*, Q^* и P^* − из Δ1. Нап, что

$\overline{S}(T^*) \le I \le \underline{S}(T^*)$

$\underbrace{S(Q^*) \le S \le S(P^*)}_{<\varepsilon}$

I S

$< \varepsilon$ $(\forall \varepsilon > 0)$

$\Rightarrow I = S$ Δ2)

Δ2) Δ-м, что $\underbrace{S_{ABCD}}_{\shortparallel\, S} = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\shortparallel\, I}$

Нат, что

$$\overset{\text{по опр } \underline{I}}{\overline{\overline{S}}(T^*)} \le \underline{I} \overset{\text{крит-й } \int\text{-ти}}{=} \overline{I} = I \overset{\text{по опр } \overline{I}}{\le} \underline{\underline{S}}(T^*) \leftarrow T^*, Q^*, P^* - \text{у } \Delta 1)$$

$$s(Q^*) \le \underline{S} = S = \overline{S} \le S(P^*)$$

по опр $\underline{S}$ — по опр кв-ти — по опр $\overline{S}$

Пусть ~~где~~ $\underline{I}, \overline{I}$ – $\int$-лы Дарбу от $f(x)$ по $[a, b]$

Т.о.: $\overbrace{\overline{\overline{S}}(T^*) \quad I \quad S \quad \underline{\underline{S}}(T^*)}^{<\varepsilon - \text{см } \Delta 1)}$ ~~— см Δ1)~~ ~~— кр-ий (*) (1)~~ ~~кв-ти~~ $\int$-ти $\Rightarrow I = S$ ~~Δ2)~~

~~Т.о. $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow |I - S| < \varepsilon$, а $\Rightarrow I = S$ Δ2)~~

Пример Некв-ая пл-ая ~~фигура~~ ф-ра — ~~квадрат~~ -т Дирихле $G \equiv \{(x, y) | x, y \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}$

Зад-ие Δ-ть, что $\underline{S}(G) = 0$, $\overline{S}(G) = 1$ ~~($\Rightarrow S(G) \neq \emptyset$)~~

Объём тела

Опр Мн-во Q наз многогр-м телом (МТ), если $Q = Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$, Q_i – ◇-ры и/или т-ки $\subset E^3$

Пусть $T \neq \emptyset$ – ∀ огр мн-во $E^3 \equiv$ тело ~~58~~

$\{V(Q)\} \equiv \{V(Q) \mid Q - \text{МТ} \subset T\}$

$\{V(P)\} \equiv \{V(P) \mid P - \text{МТ} \supset T\}$

Опр $\sup\{V(Q)\} \equiv \underline{V}(T)$ — нижний объём T

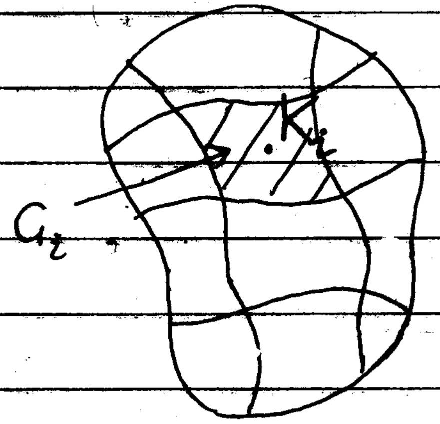
$\inf\{V(P)\} \equiv \overline{V}(T)$ — верхний — " —

Утв $\underline{V}(T) \le \overline{V}(T)$

Опр Тело T наз кубируемым (по Жордану) если $\underline{V}(T) = \overline{V}(T)$. При этом $\underline{V}(T) = \overline{V}(T) \equiv V(T)$ — объём T

§2 Двойной $\int$

Пусть G — кв-ая пл-ая ~~фигура~~ ф-ра и пусть $f(K) = f(x,y) : D_f \supset G$



$G = G_1 \cup \ldots \cup G_n$, $S(G_i) \equiv \Delta S_i$ (кв-мы)

частичные ~~фигуры~~ ф-ры

$\{G_1, \ldots, G_n\} \equiv T[G]$ — разбиение G

$\{K_1, \ldots K_n\} \equiv \{K_i\} : K_i \in G_i$ — мн-во пром-х т-к разб-я $T[G]$

Опр $\sum_{i=1}^{n} f(K_i)\Delta S_i \equiv I(G_i, K_i) \equiv I(T, K_i)$ наз $\iint$ой $\sum$-ой ф-ии f, отв-й данному разб $T[G]$ и данному выбору $\{K_i\}$