Семинар № 13

Пусть выполнены усл-я утв-я 4

$\Rightarrow \exists$ диф-я неявная ф-я $y = f(x)$

Найдём её пр-ые. Подставим $y(x)$ в ур-ие

$F(x,y)=0$ (*) $\quad$ x – векторный аргумент

$F(x,y(x)) \equiv 0$ $(=0\ \forall x)$

$F(x,y(x))$ можно рассм-ть как сложную ф-ю арг-в $x_1,\dots,x_m$. В силу того, что она $\equiv 0$ её полная пр-я по арг-м x_i также $\equiv 0$

$$\frac{DF}{Dx_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}}$$

$$f_{x_i} = -\frac{F_{x_i}}{F_y} \quad \forall i=\overline{1,m}$$

$\|f_x\| = -\dfrac{\|F_x\|}{F_y}$, $\|F_x\| = \|F_{x_1},\dots,F_{x_m}\|$ –

– матр (стр) частных пр-х (м-ца Якоби) ф-и F по векторному арг-ту x

Утв 5 Пусть выполнены усл-я утв 4, и, кроме того, $F(x,y)$ n раз диф-ма в нек окр т M_0. Тогда $\exists$ окр т M_0 в кот н-я ф-я $y=f(x)$ яв-ся n раз диф-й

Для вычисления пр-х n-го порядка надо соотв-м образом n раз продиф-ть $\equiv$-во $F(x, y(x)) = 0$, либо продиф-ть необх-ое число раз явное выр-ие 1-й пр-й. Например

$$f_{x_i x_j} = \frac{D}{Dx_j} \underbrace{\left(-\frac{F_{x_i}}{F_y}\right)}_{f_{x_i}}$$

Утв 6 Пусть ур-ие (*) опр-т на нек мн-ве X неяв-ю ф-ю $y = f(x)$. Тогда, если $F(x, y)$ диф-ма и $F_y(x, f(x))$ знакопост-на при $x \in X$, то $y = f(x)$ д-ма и $\| f_x \| = -\frac{\| F_x \|}{F_y}$

1 4(б)

Найти 2-ю пр-ю неявной ф-ии $y = f(x)$

$$y - \varepsilon \cos y = x, \quad \varepsilon \in (0, 1)$$

$$\underbrace{y - \varepsilon \cos y - x}_{F(x,y)} = 0$$

огр

$\forall$ фикс x, выбрав y дост малым, мы легко добьёмся отр-ти F, а выбрав y дост большим — пол-ти

$\forall$ фикс x $\exists y = y_1 : F < 0$ и $\exists y = y_2 : F > 0$

$\Rightarrow$ по теореме о прохождении непр-й ф-ии через все промежут-ые зн-я $\exists y = y^* : F = 0$ $(\forall x)$

13.3

$F_y = 1 + \varepsilon \sin y > 0 \quad \forall (x,y) \Rightarrow$

$\Rightarrow F$ – строго монотонна при $\forall$ фикс x

$\Rightarrow y^* ! \ \forall x \Rightarrow \exists ! \ y = f(x)$

Кроме того, F очевидно непр и диф-ма при всех зн-х арг-в $\Rightarrow$ в силу утв 6 она диф-ма

$$y' + \varepsilon \sin y \cdot y' = 1$$

$$y' = \frac{1}{1 + \varepsilon \sin y}$$

саму $y(x)$ мы не знаем, но выразили пр-ю через неё

$$y'' + \varepsilon \cos y \cdot y'^2 + \varepsilon \sin y \cdot y'' = 0$$

$$y'' = -\frac{\varepsilon \cos y}{(1 + \varepsilon \sin y)^3}$$

Ур-ие касат-й в т $M_0(x_0, y_0)$ к плоской кривой, опр-й ур-м

$F(x,y) = 0$ (x, y – скаляры)

$$F_x(M_0)\,dx + F_y(M_0)\,dy = 0$$

$$dx = x - x_0 \quad dy = y - y_0$$

Предположения

1) $F(x,y) = 0$ опр-ет пл-ю в нек окр т M_0 (дост-ые усл-я не выясняем)

2) F – диф-ма в т M_0

3) $F_x^2 + F_y^2 \big|_{M_0} \neq 0$, т.е. M_0 – обыкн-я точка кривой

Если $F_x^2 + F_y^2 \big|_{M_0} = 0 \Rightarrow M_0$ – особая т кривой (не рассм-м)

Вернёмся к задаче 1. Рассм $M_0(-\varepsilon, 0)$

$F_y(M_0)=1 \quad F_x(M_0)=-1$

$-1\cdot(x+\varepsilon)+1\cdot y=0$

$y-x=\varepsilon$ – ур-ие кас-й в т M_0

Норм вектор $\{-1,1\}$

② 10(б)

Найти все частные пр-ые 1-го и 2-го порядков ф-ии $z=f(x,y)$ в т $M_0'(1,-2)$, если $f(1,-2)=1$ и $3xyz+x^2z^2=5(x+y)$ $\quad M_0(x_0,y_0,z_0)=M_0(1,-2,1)$

$\angle$ при $z=f(x,y)$ это $\equiv$-во отн-но x и y

$d(3xyz+x^2z^2)=d5(x+y)$

$\underline{3yz\,dx}+\underline{\underline{3xz\,dy}}+\underline{\underline{\underline{3xy\,dz}}}+\underline{2xz^2dx}+\underline{\underline{\underline{2x^2z\,dz}}}=\underline{5dx}+\underline{\underline{5dy}}$

$x=1 \quad y=-2 \quad z=1$

$-4dz=9dx+2dy$

$$dz=\underbrace{-\frac{9}{4}}_{z_x(1,-2)}dx\underbrace{-\frac{1}{2}}_{z_y(1,-2)}dy$$

$3z\,dx\,dy+3y\,dz\,dx+3z\,dx\,dy+3x\,dz\,dy+3y\,dx\,dz+$
$+3x\,dy\,dz+3xy\,d^2z+2z^2dx^2+4xz\,dx\,dy+4xz\,dx\,dz+$
$+2x^2dz^2+2x^2z\,d^2z=0$

$x=1 \quad y=-2 \quad z=1 \quad dz=-\frac{9}{4}dx-\frac{1}{2}dy \quad d^2z=\underbrace{\frac{169}{32}}_{z_{xx}(1,-2)}dx^2\underbrace{-\frac{1}{4}}_{2z_{xy}(1,-2)}dx\,dy\underbrace{-\frac{5}{8}}_{z_{yy}(1,-2)}dy^2$

Д/з:
1) §2 ТВП
2) №№ 9(а,в), 10(а), 11, 14(б), 15(б), 17, 19, 20(б) К/р №1 (линал) – 45 мин

– перерыв