Лекция 14

Δ 1) Кв-ть $G \Rightarrow$ кр-ий (*)

Кв-ть $G \Longleftrightarrow \underline{S} \equiv \sup\limits_{Q\subset G}\{S(Q)\} = S = \inf\limits_{P\supset G}\{S(P)\} \equiv \overline{S}$

Из опр-ия sup сл-ет, что

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists Q^* \in \{Q\} : S(Q^*) > S - \frac{\varepsilon}{2}$

$-S(Q^*) < -S + \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

Из опр-ия inf сл-ет, что

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists P^* \in \{P\} : S(P^*) < +S + \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow$

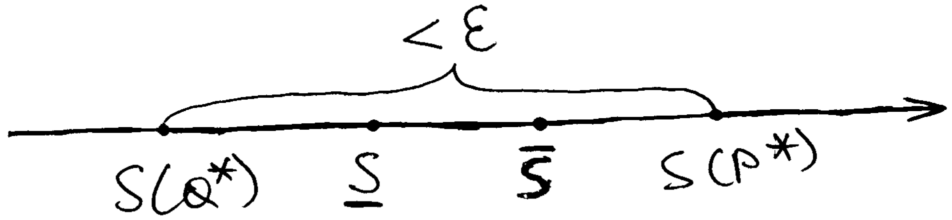
$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists$ МФ $Q^*, P^* : Q^* \subset G \subset P^*$ и

$S(P^*) - S(Q^*) < \varepsilon$ чтд (Δ1)

Δ2) кр-ий (*) $\Rightarrow$ Кв-ть G

Согласно кр-ию (*)

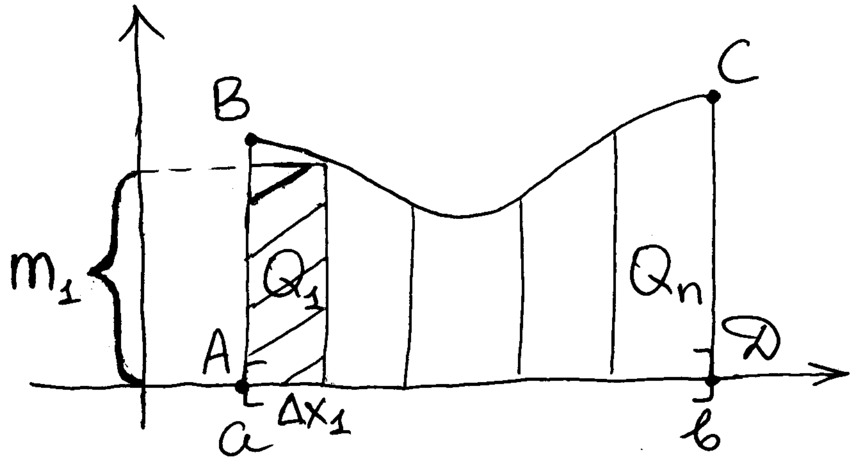
$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists Q^* \in \{Q\}$ и $P^* \in \{P\} : S(P^*) - S(Q^*) < \varepsilon$



$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow 0 \le \overline{S} - \underline{S} \le S(P^*) - S(Q^*) < \varepsilon$

всегда

$\Rightarrow \underline{S} = \overline{S} \Rightarrow G$ − квадрируема чтд 2)



ABCD − кривол-ая трапеция

Теорема 2 (о площади кривол-ой трапеции)

$f(x)$ − $\int_a^b$-ма $\Leftrightarrow$ $G \equiv ABCD$ − квадр-ма

(напр непр-на)

при этом

$$S_{ABCD} = \int_a^b f(x)dx$$

(тем самым кв-ть можно рассм-ть как критерий $\int$-ти и наоборот)

Δ Док-ем только в одну сторону:

$\int_a^b$ есть $f(x) \Rightarrow$ кв-ть ABCD

(на практике применяется именно в эту сторону)

Напомню, что

f − $\int_a^b$-ма $\Leftrightarrow$ кр-ий 1 $\int$-ти:

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists T^*[a,b] : \underline{\underline{S}}(T^*) - \overline{\overline{S}}(T^*) < \varepsilon$,

где $\overline{\overline{S}}(T^*)$ и $\underline{\underline{S}}(T^*)$ — соотв-но нижняя и верхняя суммы Дарбу ф-ии $f(x)$ для данного разбиения $T^*[a,b]$

$$\overline{\overline{S}}(T^*) \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} S(Q_i) = S(Q^*),$$ где

$Q^* \equiv Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$ — МФ $\subset ABCD$

Ан-но $\underline{\underline{S}}(T^*) = S(P^*)$, $P^* \equiv P_1 \cup \ldots \cup P_n$ — МФ $\supset ABCD$

Т.о.

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists$ МФ Q^*, P^*:

$Q^* \subset ABCD \subset P^*$ и $S(P^*) - S(Q^*) < \varepsilon$

Но это ~~и~~ есть не что иное, как ~~у~~кр-ий квадр-ти (*). Итак,

$f - \int_a^b$-ма $\Leftrightarrow$ кр-ю 1 $\int_a^b$-ти $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ кр-ий (*) кв-ти $\Leftrightarrow ABCD$ — кв-ма,

а значит

$\int_a^b$-сть $\Rightarrow$ кв-ть $ABCD$

можно через лемму Дарбу (но так сложнее)

ЧТД

Убедимся, что $S_{ABCD} \equiv \underbrace{S = I}_{\text{надо } \Delta\text{-ть}} \equiv \int_a^b f(x)\,dx$

по опр-ю $\underline{\underline{I}}$ — критерий 2 $\int$-ти (кр-й Дарбу)

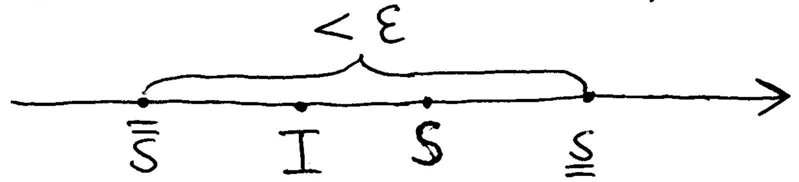
$$\overline{\overline{S}}(T^*) \le \underline{\underline{I}} = I = \overline{\overline{I}} \le \underline{\underline{S}}(T^*)$$ по опр-ю $\overline{\overline{I}}$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$S(Q^*) \le \underline{S} = S = \overline{S} \le S(P^*)$$ по опр-ю $\overline{S}$

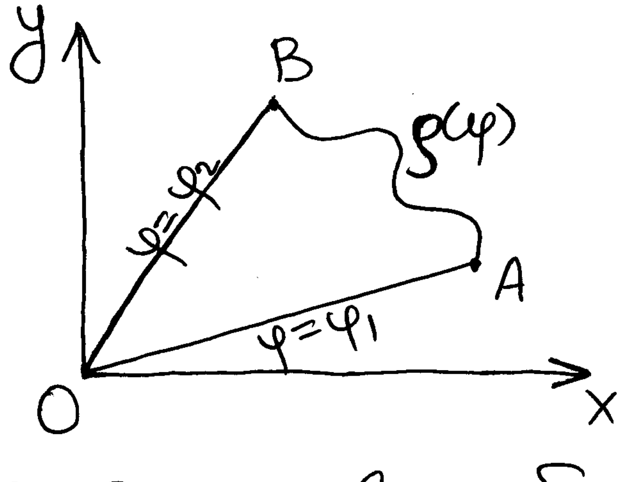
по опр-ю $\underline{S}$ — по опр-ю квадр-ти

где $\underline{\underline{I}}, \overline{\overline{I}}$ – $\int$-лы Дарбу от $f(x)$ по $[a,b]$



Т.о. $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow |I - S| < \varepsilon \Rightarrow I = S$ чтд

Площадь крив-го сектора



Пусть кривая AB задана в полярной СК: $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$

OAB – криволин-ый сектор

Утв $\rho(\varphi)$ – $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}$-ма $\Leftrightarrow G \equiv OAB$ – кв-ма, причём $S_{OAB} = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\,d\varphi$

Δ Только $\Rightarrow$. Пусть ρ – $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}$-ма $\Leftrightarrow$ кр-ий 1 $\int$-ти:

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists T^*[\varphi_1, \varphi_2]: \underline{\underline{S}}(T^*) - \overline{\overline{S}}(T^*) < \varepsilon$ — и — далее сам-но

Пример неквадрируемой плоской фигуры — квадрат Дирихле:

$G \equiv \{(x,y) \mid x,y \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}$

Зад-ие Δ-ть, что $\underline{S}=0$, $\overline{S}=1$ ($\Rightarrow S=\varnothing$)

Объём тела

Опр Мн-во $Q \subset E^3$: $Q = Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$, где Q_i — ⊠-ры или точки, наз многогранным телом (МТ)

Пусть T — ∀ огр-ое мн-во $\subset E^3$ (не обязательно связное) ≡ тело

$\{Q\}$ — мн-во всех МТ $\subset T$

$\{P\}$ — мн-во всех МТ $\supset T$

$\{V(Q)\}$, $\{V(P)\}$ — мн-ва объёмов МТ соотв-но из $\{Q\}$ и $\{P\}$

Опр $\sup\{V(Q)\} \equiv \underline{V}$ — нижний объём

$\inf\{V(P)\} \equiv \overline{V}$ — верхний объём

Утв $\underline{V} \leq \overline{V}$

Опр Тело T наз-ся кубируемым (по Жордану), если $\underline{V} = \overline{V}$. При этом $\underline{V} = \overline{V} \equiv V \equiv V(T)$ —

— объём T

Зад-ие. Сформ-ть и док-ть теор 1'

Теорема 1' (крит-й куб-ти)

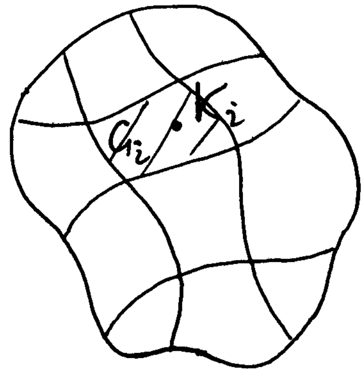
Куб-ть T $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists \text{ МТ } Q^* \text{ и } P^*: \; Q^* \subset T \subset P^* \text{ и } V(P^*)-V(Q^*)<\varepsilon}$

кр-ий (*) кубируемости T

Пример **некубируемого** тела — куб Дирикле

§2 Двойной $\int$-ал

Пусть G — квадр-ая плоская фигура и пусть $f(K) = f(x,y): D_f \supset G$



Разобьём G на n квадр-ых частей: $G = G_1 \cup \ldots \cup G_n$

G_i — частичные фигуры, $S(G_i) \equiv \Delta S_i$

$\{G_i \mid i=\overline{1,n}\} \equiv \mathbf{T}[G]$ — разбиение фигуры G

$\forall i=\overline{1,n}$ выберем т. $M_i(\xi_i, \eta_i): M_i \in G_i$

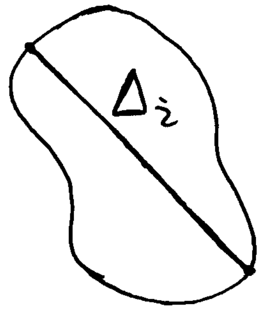
$\{K_i \mid i=\overline{1,n}\} \equiv \{K_i\}$ — мн-во промежуточных точек разб-ия $T[G]$

Опр Сумма $\sum_{i=1}^{n} f(K_i)\Delta S_i \equiv$

$\equiv I(G_1, \dots, G_n, K_1, \dots, K_n) \equiv f(G_i, K_i) \equiv f(T, K_i)$

наз-ся ∫∫ой $\sum$-ой ф-ии f, отв-ей данному разбиению $T[G]$ и данному выбору пром-х точек K_i.

$\Delta_i \equiv \sup\limits_{M', M'' \in G_i} \rho(M', M'') \equiv \mathrm{diam}\,(G_i)$ — диаметр G_i



обобщ-ие диаметра окр-ти

$\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta_i \equiv \Delta(T)$ — диаметр разбиения $T[G]$

Опр Число I наз-ся пределом ∫-ых сумм $I(T, M_i)$ при $\Delta \to 0$, если

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall T[G] : \Delta(T) < \delta$ и

$\forall$ выбора $\{K_i\} \Rightarrow |I(T, K_i) - I| < \varepsilon$

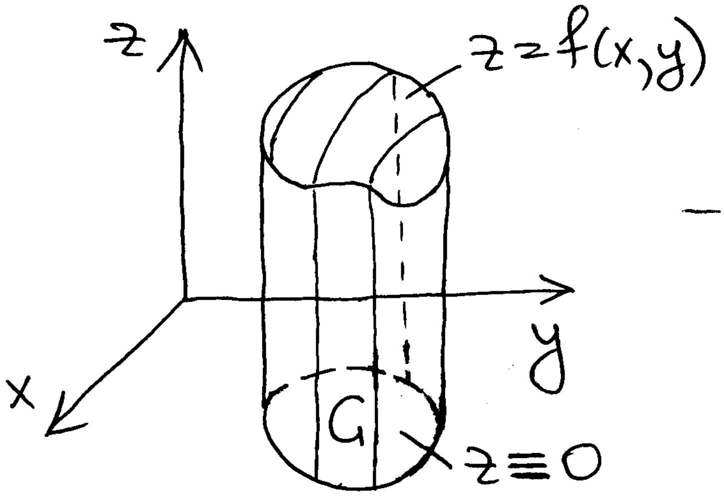
Обозн $I = \lim\limits_{\Delta \to 0} I(T, K_i)$

Опр Если сущ-ет $\lim\limits_{\Delta \to 0} I(T, K_i) \equiv I$, то ф-ия $f(x,y)$ наз-ся ∫ой (по Риману) на мн-ве G, а число I наз-ся двойным ∫-ом от ф-ии

$f(x,y)$ по мн-ву G $\boxed{14.8}$

Обозн $I = \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy \equiv \iint f(M)\,ds$

<u>Геометр-ий смысл $\iint$-ла</u>



Пусть $f(x,y) \geq 0$

— кривол-ый цилиндр T_f

Утв 1 $f(x,y)$ — $\iint\limits_G$-ма $\Leftrightarrow$ T_f — кубируем,

при этом $V(T_f) = \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$

Задание: Док-ть $\Rightarrow$ (док-во ан-но док-ву квадр-ти кривол-ой трапеции)

Пусть $f(x,y) \equiv 1 \Rightarrow V = S(G)\cdot \cancelto{1}{h} = S(G)$

(это нестрогий вывод ф-лы из утв-я 2)

Утв 2 Если G — квадр-ма, то $\exists \iint\limits_G dx\,dy = S(G)$

Δ $I(T, K_i) \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \cancelto{1}{f(K_i)}\,\Delta S_i = \underset{\text{const}}{\underset{\parallel}{S(G)}}$

const (не зависит от T и $\{K_i\}$)

$$\Rightarrow \exists \underbrace{\lim_{\Delta\to 0} I(T, K_i)}_{\equiv \iint\limits_G 1\cdot dx\,dy} = S(G)$$

$$\Rightarrow \exists \iint\limits_G dx\,dy = S(G) \quad \not\Delta$$

Короткий вариант док-ва:

$$\iint\limits_G 1\cdot dx\,dy = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} \cancel{f(K_i)}^{\,1} \Delta S_i = \lim_{\Delta\to 0} \overset{\text{const}}{\overset{\shortparallel}{S(G)}} = S(G)$$

Суммы и $\int$-лы Дарбу

Пусть $f(x)$: $D_f \supset G$ и пусть $f(x)$ огр-на на G, где G – квадр-ое мн-во

Рассм-м произв-ое разбиение $T[G]$ и введём обозн-ия

$$\left.\begin{aligned} M_i &\equiv \sup_{G_i} f(x) \\ m_i &\equiv \inf_{G_i} f(x) \end{aligned}\right\} \forall i = \overline{1, n}$$

– т.к. $f(x)$ огр на G, то они заведомо $\exists$-ют

$$\left.\begin{aligned} \underline{\underline{S}} &\equiv \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta S_i = \underline{\underline{S}}(T) \\ \overline{\overline{S}} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta S_i = \overline{\overline{S}}(T) \end{aligned}\right\rangle$$

верхняя и нижняя суммы Дарбу соотв-но

$$\inf_{T[G]} \{\underline{\underline{S}}(T)\} \equiv \overline{I}$$

$$\sup_{T[G]} \{\overline{\overline{S}}(T)\} \equiv \underline{I}$$

верхний и нижний $\int$-лы Дарбу соотв-но

Утв $\underline{I} \leq \overline{I}$ 14.10

Теор 3 (Критерий 1 $\iint$-ти)

$\exists$-ие $\iint\limits_G f(x)dx \Longleftrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \forall \varepsilon>0 \ \exists T^*[G]: \\ \underline{\underline{S}}(T^*) - \overline{\overline{S}}(T^*) < \varepsilon \end{array}}$

Кр-ий 1

Теор 4 (критерий 2 $\iint$-ти) ← Кр-ий Дарбу

$\exists$-ие $\iint\limits_G f(x)dx \Longleftrightarrow \underline{I} = \overline{I} \ (= \iint\limits_G f(x)dx)$

Кр-ий 2

Теор 5 (необх-ое усл-ие $\iint$ти)

$\iint\limits_G$-ть $f(x) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ огр-ть $f(x)$ на G

Теор 6 (дост-ое усл-ие $\iint$ти)

$f(x)$ непр на $G \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f(x)$ $\iint\limits_G$-ма

Дополн-но:

Теор 6+

$f(x)$ непр на G кроме мн-ва площади нуль $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f(x)$ $\iint\limits_G$-ма