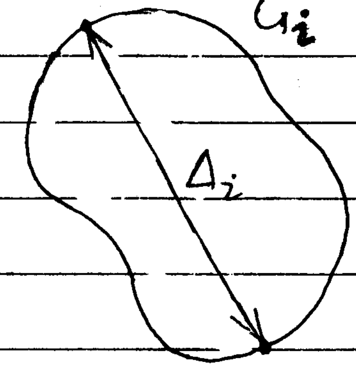


$$\sup_{M',M''\in G_i} \rho(M',M'') \equiv \operatorname{diam}\{G_i\} \equiv \Delta_i$$

— диаметр G_i (обобщ. для окр)

$$\max_{1\le i\le n} \Delta_i \equiv \Delta(T) \text{ — диаметр разб } T[G]$$

Опр Число I наз $\lim$-м $\int$-х сумм $I(T,K_i)$ при $\Delta\to 0$, если

$\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists \delta>0 : \forall T[G] : \Delta(T)<\delta$ и

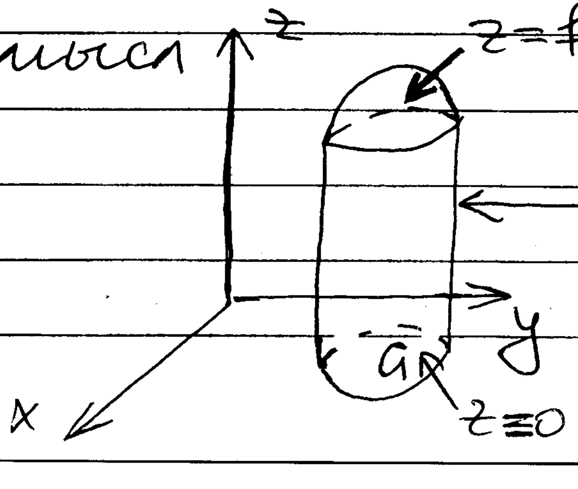
$\forall$ выбора $\{K_i\} \Rightarrow |I(T,K_i)-I|<\varepsilon$

Обозн $I=\lim\limits_{\Delta\to 0} I(T,K_i)$

Опр Если сущ $\lim\limits_{\Delta\to 0} I(T,K_i)=I$, то ф-я f наз $\int$ой (по Риману) на мн-ве G, а число I наз двойным $\int$ом от ф-ии f по G

Обозн $I=\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_G f(M)\,ds$

Геом смысл $\iint$-ла



кривол-й цилиндр T_f

Утв 1 $f(x,y)$ – $\iint\limits_G$-ма $\Rightarrow$ 1) T_f – куб-ем

2) $V(T_f) = \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$

Δ-ть сам-но (полн ан-но теор $\frac{2}{7}$)

Утв 2 Кв-ть $G \Rightarrow \exists \iint\limits_G dx\,dy = S(G)$

Δ $\iint\limits_G 1\cdot dx\,dy = \lim\limits_{\Delta\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} \underbrace{f(x_i)}_{1}\Delta S_i = \lim\limits_{\Delta\to 0} \underset{\text{const}}{S(G)} = S(G)$ $\blacktriangle$

Суммы и $\iint$лы Дарбу

Пусть $f(x,y)$: $D_f \supset G$ и пусть f огр на G, где G – кв-ое мн-во

~~Рассм произв разб $T[G]$ и введём обозн-я~~

$m_i = \inf\limits_{G_i} f(x,y)$, $M_i = \sup$ ($\exists$-ют, т.к. f огр на G, а $\Rightarrow$ и на G_i)

~~$M_i = \sup$~~

$\overline{\overline{S}}(T) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta S_i$ – нижн сумма Дарбу

$\underline{\underline{S}}(T) = \quad M_i$ – верхн – " –

$\underline{I} = \sup\limits_{T[G]} \overline{\overline{S}}(T)$ – нижн $\iint$ал Дарбу

$\overline{I} = \inf\limits_{T[G]} \underline{\underline{S}}(T)$ – верхн – " –

Утв $\underline{I} \le \overline{I}$

Лемма Дарбу →

$\lim\limits_{\Delta\to 0} \overline{S}(\tau) = \underline{I}$, $\lim\limits_{\Delta\to 0} \underline{S}(\tau) = \overline{I}$

Теор 3, 4 (о кр-ях $\iint$-ти)

$\iint\limits_G$-ть $f \overset{1)}{\Longleftrightarrow}$ $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists T^*[G]: \ \underline{S}(T^*) - \overline{S}(T^*) < \varepsilon}$

$\Updownarrow$ 2)

$\boxed{\underline{I} = \overline{I}} = I \equiv \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$ (кр-ий Дарбу)

Теор 5 (о необх-м усл $\iint$-ти)

$\iint\limits_G$-ть $f \Rightarrow$ огр-ть f на G

$\not\Leftarrow$

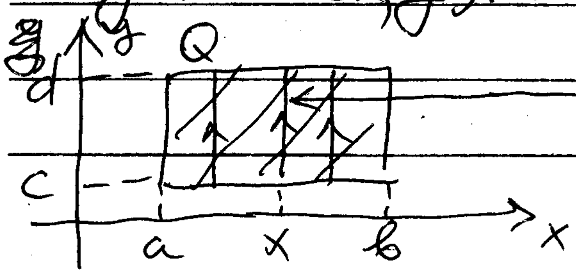
Теор 6 (о дост-м усл $\iint$-ти)

f — непр на G кроме мн-ва площади нуль $\Rightarrow f$ — $\iint\limits_G$-ма

$\not\Leftarrow$

§3 Повторные $\int$лы

Пусть $f(x,y)$: $D_f \supset$ прям $Q = [a,b]\times[c,d]$



$\int_c^d f(x,y)\,dy \equiv I(x)$

и далее $\to \int_a^b I(x)\,dx$

Теор 7.1 (о повторном $\int$ле для Q) Пусть: 14.4

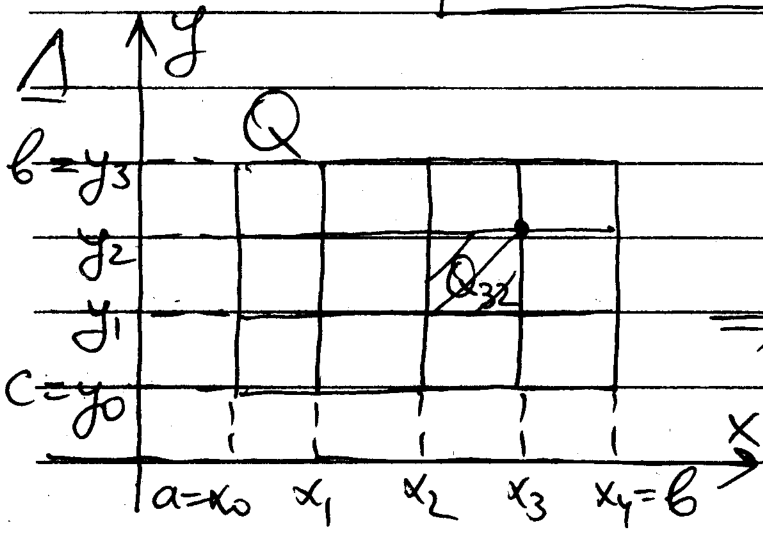
1) $\exists \iint\limits_Q f(x,y)\,dx\,dy$

2) $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \exists \int\limits_c^d f(x,y)\,dy \equiv I(x)$

~~Тогда~~ Тогда

$$\Rightarrow \exists \int\limits_a^b I(x)\,dx \equiv \boxed{\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \iint\limits_Q f(x,y)\,dx\,dy}$$

Δ



$Q = Q_{11} \cup \ldots \cup Q_{nm}$

$\Rightarrow T[Q] \equiv T[a,b] \times T[c,d] = \{Q_{ij} \mid i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}\}$

Обозн $m_{ij} = \inf\limits_{Q_{ij}} f(x,y)$, $M_{ij} = \sup$ —

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, $\Delta S_{ij} = S(Q_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$

$\Delta_{ij} = \mathrm{diam}\, Q_{ij} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2}$, $\Delta(T) = \max\limits_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \Delta_{ij}$

Надо д-ть, что $\exists \int\limits_a^b I(x)\,dx \equiv \lim\limits_{\Delta \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i$

где $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \equiv \{\xi_i\} : \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

— мн-во пром-х т-к разб $T[a,b]$

Нап, что (см усл 2)

$$I(\xi_i) \equiv \int_a^b f(\xi_i, y)dy = \int_{y_0}^{y_1} + \dots + \int_{y_{m-1}}^{y_m} = \underbrace{\sum_{j=1}^{m}{}' \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy}$$

Т.о. надо д-ть, что $\exists \lim\limits_{\Delta \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n}{}' I(\xi_i)\Delta x_i =$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n}{}' \sum_{j=1}^{m}{}' \int_{y_{j-1}}^{y_j} \boxed{f(\underset{\Uparrow}{\xi_i}, \underset{\Uparrow}{y})} dy\, \Delta x_i \qquad (1)$$

$$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \equiv Q_{ij}$$

Зам, что по опр inf и sup $\Rightarrow m_{ij} \le \boxed{} \le M_{ij} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{y_{j-1}}^{y_j} m_{ij}\, dy \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} M_{ij}\, dy$$

$$\Rightarrow m_{ij}\Delta y_j \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy \le M_{ij}\Delta y_j \qquad (2)$$

Из (1), (2) $\Rightarrow$

$$\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n,m}{}' m_{ij} \overset{\Delta S_{ij}}{\boxed{\Delta y_j \Delta x_i}}}_{\underline{S}(T[Q])} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n}{}' I(\xi_i)\Delta x_i}_{I(T[a,b], \xi_i)} \le \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n,m}{}' M_{ij} \overset{\Delta S_{ij}}{\boxed{\Delta y_j \Delta x_i}}}_{\overline{S}(T[Q])}$$

нижн Σ-а Дарбу ф-ии $f(x,y)$ — $\int$-ая Σ-а ф-ии $I(x)$ — верхн Σ-а Дарбу ф-ии $f(x,y)$

по лемме Дарбу $\qquad \Delta \to 0$

$$\underline{I} = I = \overline{I}$$

в силу усл (1) (по кр-ию $\int$-ти Дарбу)

Здесь $\underline{I}, \overline{I}$ – $\iint$ны Дарбу от $f(x,y)$ по Q 14.6

$$\underline{I} = \iint\limits_Q f(x,y)\,dx\,dy$$

Т.о. по теор о 2-х пол-х

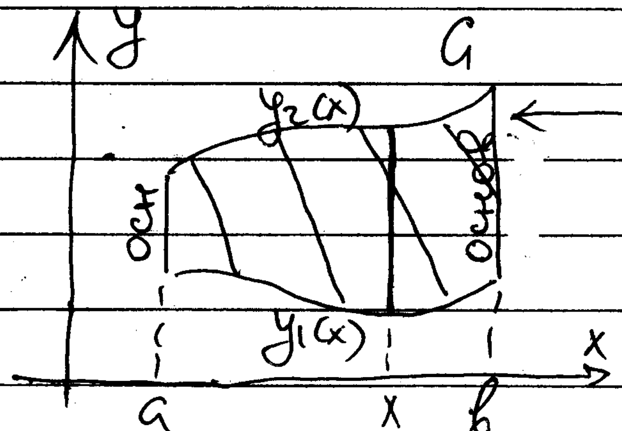
$$\exists \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i \equiv \int_a^b I(x)\,dx = \underline{I}$$

т.е. $\exists \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \iint\limits_Q f(x,y)\,dx\,dy$ ▲

Зам Меняя ролями x и y, пол-м

$$\iint\limits_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

Пусть $f(x,y): D_f \supset G = [a,b]\times[y_1(x), y_2(x)]$,
$y_i(x)$ – непр и $y_1(x) \le y_2(x)$ $\forall x \in [a,b]$



← y-трапециевидная ~~или в~~ фигура
Зам т.к. G = разности
~~Задание ▲ и ... G~~
~~привод-х трап-й, то~~
~~(полн ан/нео теор 2)~~
в силу теор 2 $\Rightarrow G$ – кв-мо

Теор 7.2 (о повт-м $\int$ле для G) Пусть:

1) $\exists \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$

2) $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \exists \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \equiv I(x)$