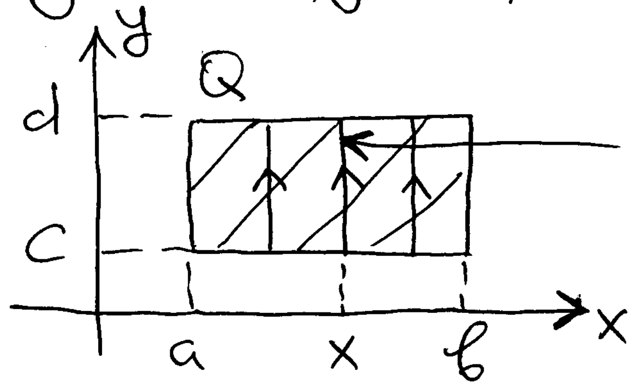
Лекция 15

§3 Повторные ∫-лы

Пусть $f(x,y)$: $D_f \supset$ прям $Q = [a,b]\times[c,d]$



$$\int_c^d f(x,y)\,dy \equiv I(x)$$

и далее $\to \int_a^b I(x)\,dx$

Теор 7.1 (о повторном ∫ле для пр-ка) Пусть:

1) $\exists \iint_Q f(x,y)\,dx\,dy$

2) $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \exists \int_c^d f(x,y)\,dy \equiv I(x)$

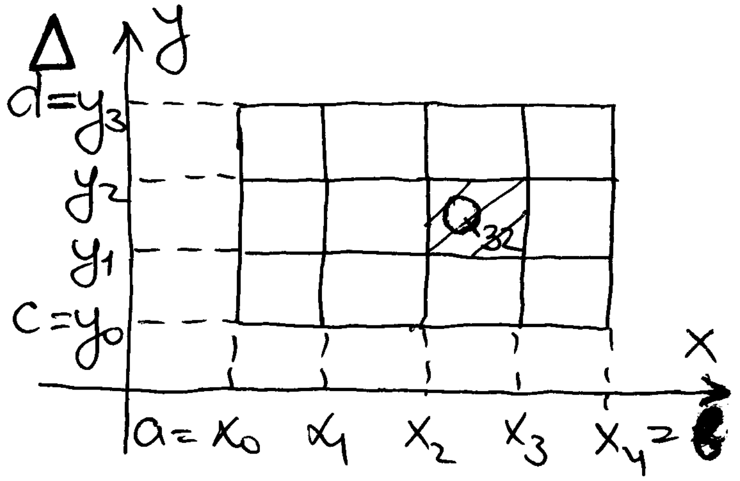
Тогда:

1) $\exists \int_a^b I(x)\,dx \equiv \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$, наз-ый повторным ∫-ом от ф-ии f по пр-ку Q.

2) $$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \underbrace{\int_a^b dx \underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{\text{внутр-ий ∫-л}}}_{\text{внешний ∫-л}}$$

Сперва берётся внутр-й ∫-ал (в повторном), а затем внешний

15.2



Разобьём Q на $n\times m$ частичных (замкнутых) прям-ов: $Q=Q_{11}\cup\ldots\cup Q_{nm}$ (на рис. $n=4$, $m=3$)

$\Rightarrow$ Получим разбиение T

$T[Q]=\{Q_{ij} \mid i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}\} \equiv T[a,b]\times T[c,d]$ —

— произв-ие разбиений отр-ов $[a,b]$ и $[c,d]$

Положим

$$m_{ij}\equiv \inf_{Q_{ij}} f(x,y),\quad M_{ij}\equiv \sup_{Q_{ij}} f(x,y)$$

$$\Delta x_i \equiv x_i - x_{i-1},\quad \Delta y_j \equiv y_j - y_{j-1},\quad \Delta S_{ij}\equiv \Delta x_i\,\Delta y_j = S(Q_{ij})$$

$\Delta_{ij}\equiv \mathrm{diam}(Q_{ij})=\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_j^2}$ — диагональ Q_{ij}

$\max\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \Delta_{ij} = \Delta(T)$ — диаметр разб-ия T

$\forall\, i=\overline{1,n}$ выберем $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$

Получим мн-во $\{\xi_i \mid i=\overline{1,n}\}\equiv\{\xi_i\}$ мн-во пром-ых т-к разб-ия $T[a,b]$

Т.к. $m_{ij}\le f(x,y)\le M_{ij}$ $\forall (x,y)\in Q_{ij}\equiv[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$,

то $m_{ij}\le f(\xi_i,y)\le M_{ij}$ $\forall\, y\in[y_{j-1},y_j]$ (1)

По условию 2) т-мы

$$\forall \xi_i \Rightarrow \exists \int_c^d f(\xi_i, y)\,dy \Rightarrow \exists \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)\,dy$$

Тогда из (1)

$$\Rightarrow \int_{y_{j-1}}^{y_j} m_{ij}\,dy \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)\,dy \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} M_{ij}\,dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{ij}\Delta y_j \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)\,dy \le M_{ij}\Delta y_j \quad \begin{cases}\forall i = \overline{1,n} \\ \forall j = \overline{1,m}\end{cases} \quad (2)$$

В силу аддит-го св-ва опр-го ∫-ла

$$\int_{y_0}^{y_1} + \int_{y_1}^{y_2} + \dots + \int_{y_{n-1}}^{y_n} = \int_{y_0}^{y_n} = \int_c^d$$

Тогда из (2)

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\Delta y_j \le \underbrace{\int_c^d f(\xi_i, y)\,dy}_{I(\xi_i)\text{ — см. усл-ие 2)}} \le \sum_{j=1}^{} M_{ij}\Delta y_j \Big\} \times \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\overbrace{\Delta x_i \Delta y_j}^{\Delta S_{ij}}}_{\overline{\overline{S}}(T[Q])} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i}_{I(T[a,b], \xi_i)} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\overbrace{\Delta x_i \Delta y_j}^{\Delta S_{ij}}}_{\underline{\underline{S}}(T[Q])} \quad (3)$$

нижняя Σ-а Дарбу ф-ии $f(x,y)$

∫-ая Σ-а ф-ии $I(x)$

верхняя Σ-а — и —

По лемме Дарбу

$$\lim_{\Delta\to 0} \overline{\overline{S}}(T[Q]) = \underline{I} = I = \overline{I} = \lim_{\Delta\to 0} \underline{\underline{S}}(T[Q])$$

кр-ий ∫-ти ф-ии $f(x,y)$

Здесь $\underline{I}, \overline{I}$ – ∬лы Дарбу от $f(x,y)$ по Q

I – ∬ от $f(x,y)$ по Q

Тогда из (3) по теор о 2-х полиц-х (при $\Delta\to 0$)

$$\Rightarrow \exists \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i \equiv \int_a^b I(x)dx = I,$$

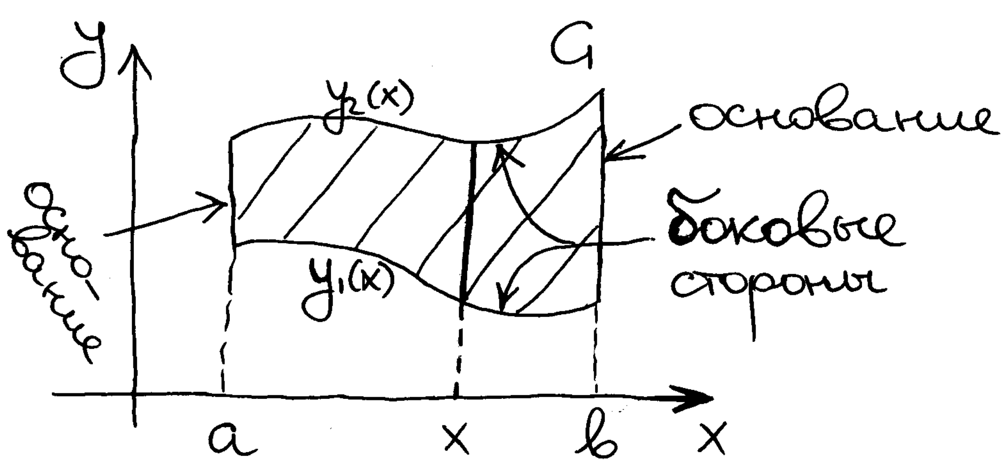
т.е. $\exists \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \iint_Q f(x,y)dxdy$ чтд $\cancel{\Delta}$

Зам Меняя роли x и y, получаем

$$\iint_Q f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

Пусть теперь $f(x,y): D_f \supset G =$
$= [a,b] \times [y_1(x), y_2(x)]$, где $y_1(x), y_2(x) \in C[a,b]$ (дир на $[a,b]$)
и $\forall x \in [a,b] \Rightarrow y_1(x) \le y_2(x)$

Зам 1 Такое мн-во G наз-ют (замкнутой) y-трапециевидной областью (прям-к – частный случай y-трап-ой обл-ти)



Зам 2 y-трапец-ая обл-ть квадрируема (посл-ее утв-ие – элем-ое $\Rightarrow$ ие квадр-ти кривол-ой трапеции)

Теор 7.2 (о повт-м $\int$ле для ~~произв-й~~ y-трап-ой обл-ти)

Пусть:

1) $\exists \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$

2) $G = [a,b] \times [y_1(x), y_2(x)]$ и

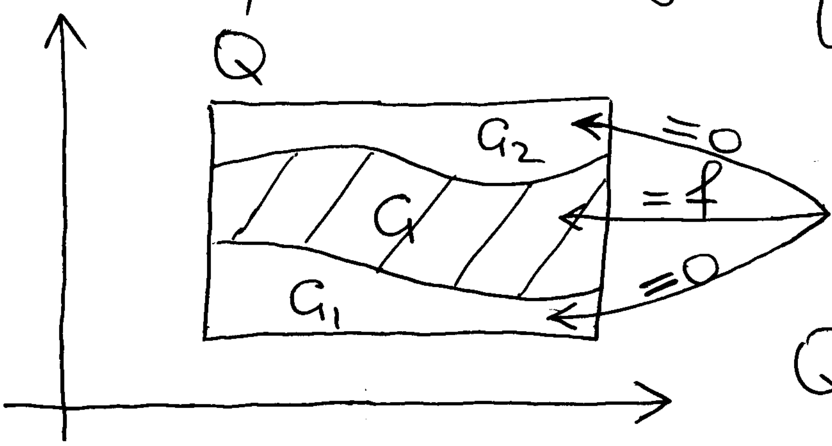
$$\forall x \in [a,b] \Rightarrow \exists \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \equiv I(x)$$

Тогда

$$\exists \int\limits_a^b I(x)\,dx \equiv \boxed{\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy}$$

ф-ла сведения двойного $\int$ла к повторному для произв-ой y-трап-ой обл-ти G

Δ Рассм-м прям-к $Q \supset G$ и опред-м в нём ф-цию $\mathcal{F}(x,y) \equiv \begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in G \\ 0, & (x,y)\in Q\setminus G \end{cases}$



"+" пишут в случае объед-ия непересек-ся мн

$$Q = G_1 + G_2 + G_3$$

1) Зам, что ~~т.к.~~ $\mathcal{F}$ $\iint$-ма в G (по условию, т.к. совпадает с f), в G_1 и G_2 (потому, что $\equiv 0$), а значит (по аддит-му св-ву $\iint$-ла)

$$\exists \iint\limits_Q \mathcal{F}\,dxdy = \iint\limits_{G_1} \underbrace{\mathcal{F}}_{0}\,dxdy + \iint\limits_{G} \underbrace{\mathcal{F}}_{f}\,dxdy + \iint\limits_{G_2} \underbrace{\mathcal{F}}_{0}\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_G f\,dx\,dy$$

2) Зам, что $\forall x\in[a,b]$ $\mathcal{F}$ $\int$-ма по y на $[y_1(x), y_2(x)]$ (по условию, т.к. совп-ет с f), $[c, y_1(x)]$ и $[y_2(x), d]$ (потому, что $\equiv 0$), ~~а значит и что~~
а значит по аддит-му св-ву $\int$-ла $\forall x\in[a,b] \Rightarrow$

$$\exists \int\limits_c^d \mathcal{F}(x,y)\,dy = \int\limits_c^{y_1(x)} \underbrace{\mathcal{F}}_{0}\,dy + \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \underbrace{\mathcal{F}}_{f}\,dy + \int\limits_{y_2(x)}^{d} \underbrace{\mathcal{F}}_{0}\,dy =$$

$$= \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f\,dy$$

Из 1)+2)

по теор 7.1 для ф-ии $\tilde{f}(x,y)$

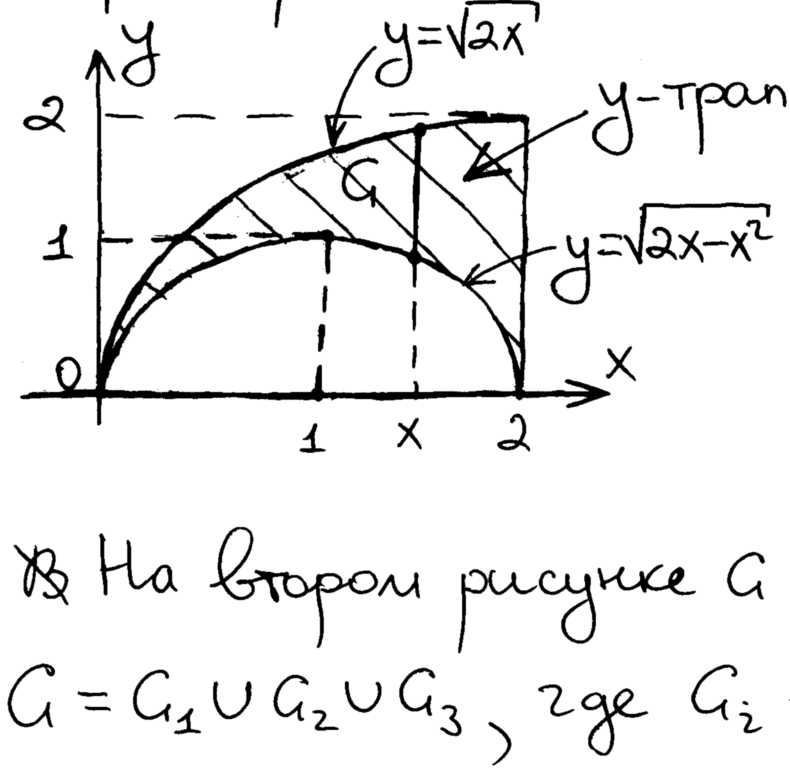
$$\exists \int_a^b dx \int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy = \iint_Q \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy$$

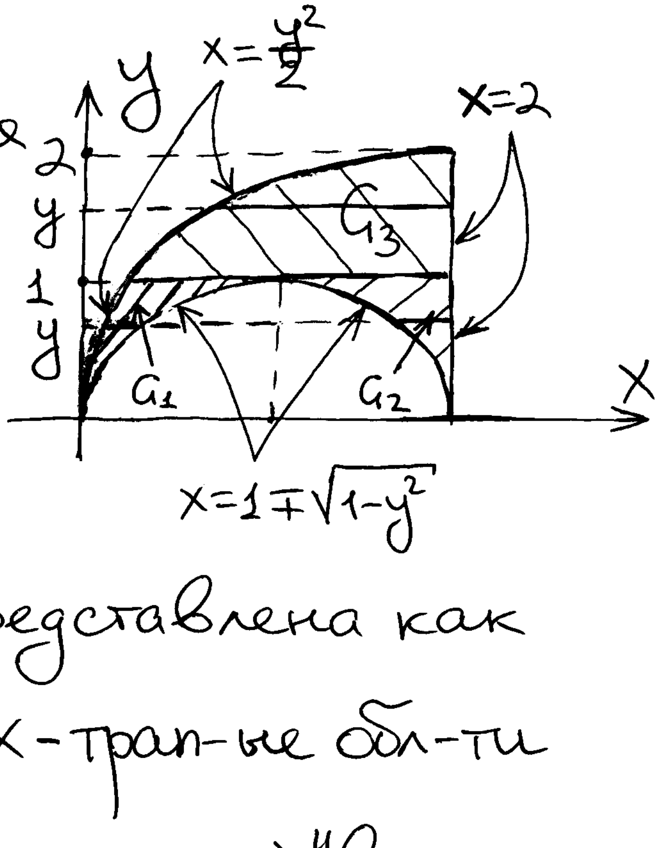
т.е. $\|$ 2) $\qquad \|$ 1)

$$\exists \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \iint_Q f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{чтд}$$

Зад-ие Сформулировать теор 7.2 для случая x-трапец-ой обл-ти

Пример





На втором рисунке G представлена как

$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$, где G_i – x-трап-ые обл-ти

В соответствии с данным (двояким) "восприятием" области G получаем

15.8

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f\,dy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f\,dx + \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f\,dx + \int_1^2 dy \int_{y^2/2}^{2} f\,dx$$