Теор 7.2 (о повт-м $\iint$-ле для G) Пусть: 15.1

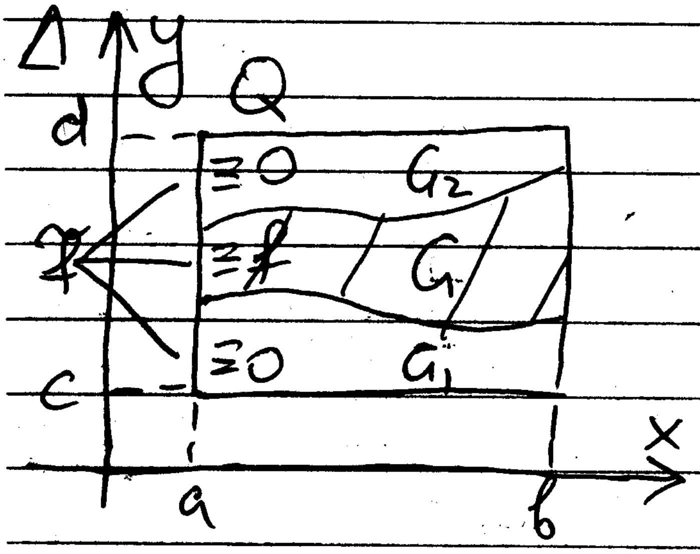
1) $\exists \iint\limits_G f(x,y)\,dxdy$

2) $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \exists \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \equiv I(x)$

Тогда

$$\exists \int\limits_a^b I(x)\,dx \equiv \boxed{\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \iint\limits_G f(x,y)\,dxdy}$$

Δ



Постр-м прям-к $Q = G_1 + G + G_2 \supset G$ и опр-м в Q ф-ю

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{в } G \\ 0 & \text{в } G_1 \cup G_2 \end{cases}$$

1) Зам, что по аддит. св-ву $\iint$-ла

$$\exists \iint\limits_Q F\,dxdy = \cancel{\underbrace{\iint\limits_{G_1} F}_{=0}} + \underbrace{\iint\limits_G F}_{=f} + \cancel{\underbrace{\iint\limits_{G_2} F}_{=0}} = \iint\limits_G f\,dxdy \quad (1)$$

$\exists$-ет по усл 1)

2) Зам, что по аддит св-ву $\int$-ла $\forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \int\limits_c^d F\,dx = \cancel{\underbrace{\int\limits_c^{y_1(x)} F}_{=0}} + \underbrace{\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} F}_{=f} + \cancel{\underbrace{\int\limits_{y_2(x)}^{d} F}_{=0}} = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f\,dy \quad (2)$$

$\exists$-ет по усл 2)

Из (1), (2) по теор 7.1 для F и $Q \Rightarrow$

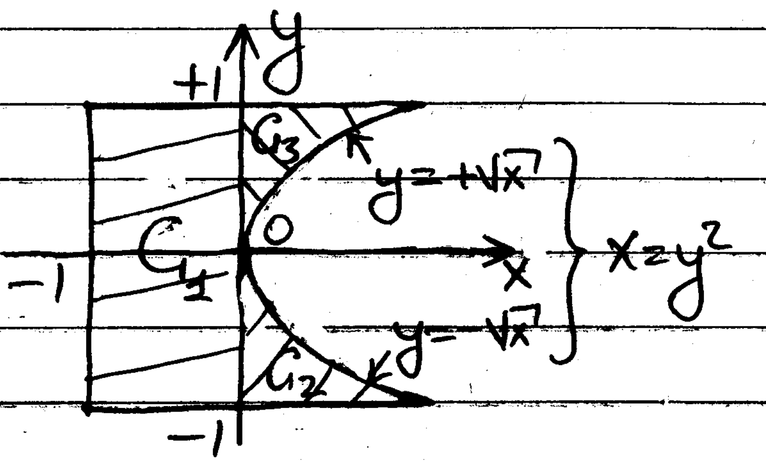
$$\exists \int_a^b dx \int_c^d F\,dy = \iint_Q F\,dxdy$$

т.е. $\quad \| (2) \qquad \| (1)$

$$\exists \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f\,dy = \iint_G f\,dxdy$$

Зад-ие Сф-ть теор 7.2 для x-трап ~~[illegible]~~ фигуры

1



Дано:
$f(x,y)$
$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$

а) Т.к. G_i — y-трап-ные, то

$$\iint_G f\,dxdy = \iint_{G_1} + \iint_{G_2} + \iint_{G_3} =$$

$$= \int_{-1}^{0} dx \int_{-1}^{+1} f\,dy + \int_{0}^{+1} dx \int_{-1}^{-\sqrt{x}} f\,dy + \int_{0}^{+1} dx \int_{+\sqrt{x}}^{+1} f\,dy$$

б) Т.к. G — x-трап-ная, то

$$\iint_G f\,dxdy = \int_{-1}^{+1} dy \int_{-1}^{y^2} f\,dx$$

§4 Замена перем-х

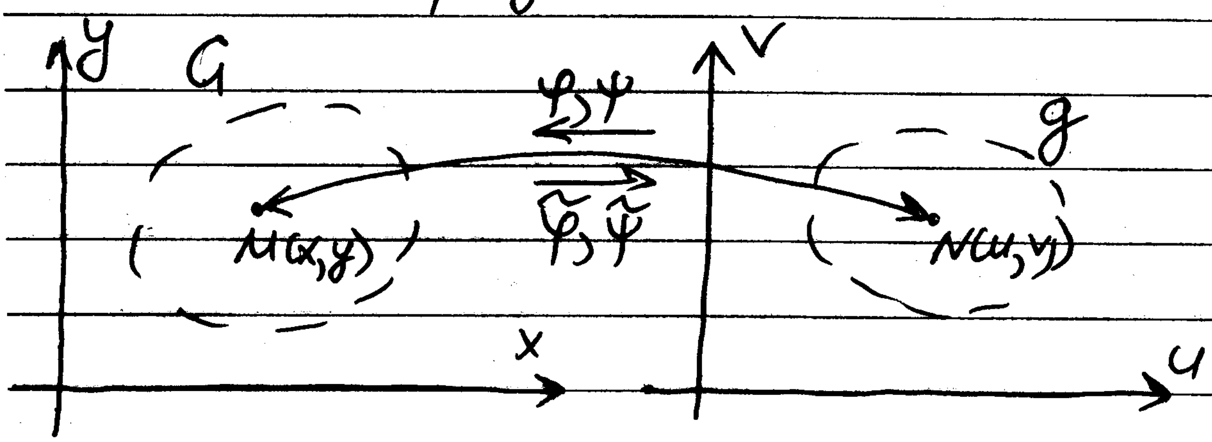
№15.3

Нап, что $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t))\frac{dx}{dt}dt$ $\quad a = \overset{x}{\cancel{\varphi}}(\alpha)$, $b = \underset{x}{\cancel{\varphi}}(\beta)$

Оказ-ся, $\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy \overset{dS>0}{\equiv}$

$= \iint\limits_g f(x(u,v), y(u,v)) \underbrace{\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv}_{dS} \quad dS>0$

«проувая»



Пусть G и g – квадр-ые обл~~-ти~~ и пусть ф-ии $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ уст-ют ~~взаимно~~ вз-но однозн-ое соотв-ие (отобр) между g и G

Теор 8 (о замене перем-х в $\iint$) Пусть:

1) $\varphi, \psi \in C^1(g)$ (все ЧП непр в g)

2) $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$ и огр в g

3) $\exists \iint\limits_G f(x,y)dxdy$

Тогда

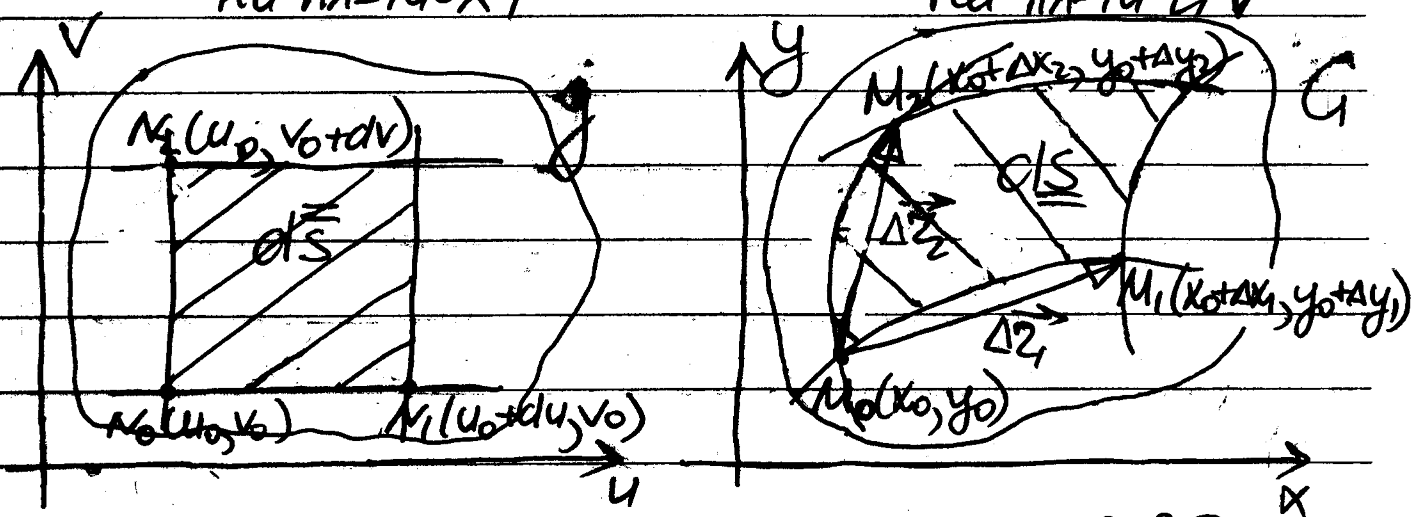
$$\exists \iint\limits_{g} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|du\,dv = \iint\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy$$

Δ Без Δ-ва

<u>Геом смысл ф-лы замены пер-х</u>

$$\iint\limits_{G} f(x,y)\,d\underline{S} = \iint\limits_{g} f(u,v)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| d\overset{=}{S}$$

~~эл-т пл-ди~~ на пл-ти XY   ~~эл-т пл-ди~~ на пл-ти UV



$\Delta u \equiv du$, $\Delta v \equiv dv$ $d\underline{S}$-пл-дь крив~~ол-го~~-го □-ма

Пусть φ,ψ: $N_0 \mapsto M_0$, $N_1 \mapsto M_1$, $N_2 \mapsto M_2$

$\Rightarrow x_0 = \varphi(u_0,v_0)$, $y_0 = \psi(u_0,v_0)$ при малом du

$x_0+\Delta x_1 = \varphi(u_0+du, v_0)$, $y_0+\Delta y_1 = \psi(u_0+du, v_0)$

$\Rightarrow \Delta x_1 = \varphi(u_0+du,v_0)-\varphi(u_0,v_0) \equiv \Delta\varphi(du,0)\big|_{(u_0,v_0)} \approx$

$\approx d\varphi(du,0)\big|_{(u_0,v_0)} \equiv \varphi_u(u_0,v_0)\cdot du + \cancel{\varphi_v(u_0,v_0)\cdot 0}$

Ан-но $\Delta y_1 \approx \psi_u(u_0,v_0)\,du$, √15.5

$\Delta x_2 \approx \varphi_v(u_0,v_0)\,dv$, $\Delta y_2 \approx \psi_v(u_0,v_0)\,dv$

$d\underline{s} \approx S(\square)$, $\underbrace{\vec S(\square)}_{\text{вектор пл-ди}} = [\Delta\vec z_1, \Delta\vec z_2] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \Delta x_1 & \Delta y_1 & 0 \\ \Delta x_2 & \Delta y_2 & 0 \end{vmatrix} \approx$

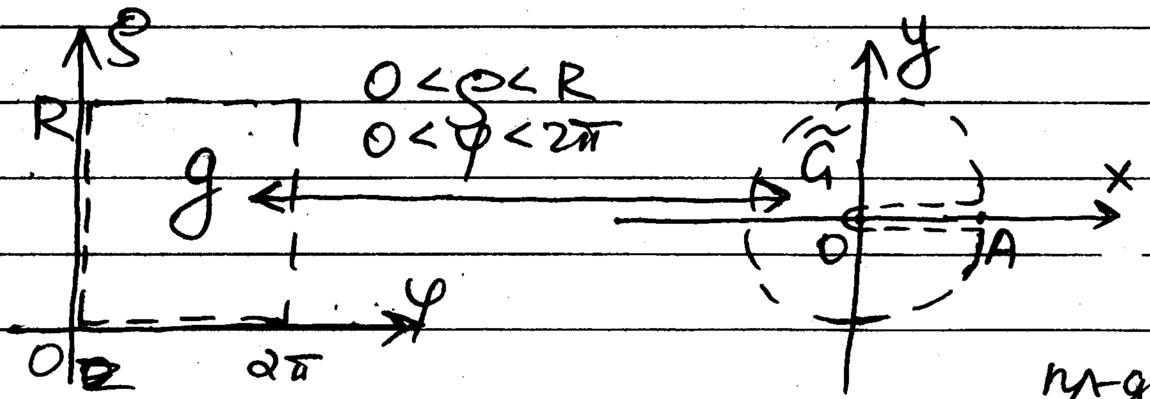
$$\approx \begin{vmatrix} \varphi_u du & \psi_u du \\ \varphi_v dv & \psi_v dv \end{vmatrix} \cdot \vec k = \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix} \underbrace{du\,dv}_{d\bar{s}} \vec k =$$

$$= \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\, d\bar{s}\cdot\vec k = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\, d\bar{s}\cdot\vec k$$

$$\Rightarrow d\underline{s} \approx \underbrace{\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|}_{\text{коэф-т растяжения эл-та пл-ди}} d\bar{s}\, \underbrace{|\vec k|}_{1} \quad (\approx \text{ при малых } du, dv)$$

① $\bar G: x^2+y^2 \le R^2$, $S(\bar G) = ?$

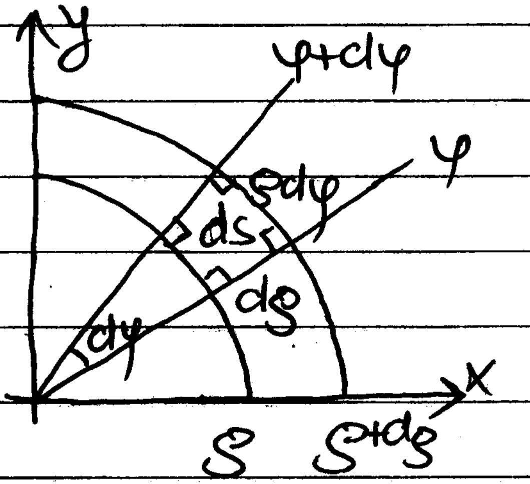
$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi & 0 \le \rho \le R \\ y = \rho\sin\varphi & 0 \le \varphi < 2\pi \end{cases}$$



Круг $\bar G$ = откр круг G + окр $= \tilde G + \overbrace{[O,A) + \text{окр}}^{\text{пл-дь нуль}}$

$$\Rightarrow S(\bar G) = S(\tilde G) = \iint\limits_{\tilde G} dx\,dy = \iint\limits_{g} \left|\frac{D(x,y)}{D(\rho\varphi)}\right| d\rho\, d\varphi$$ 15.6

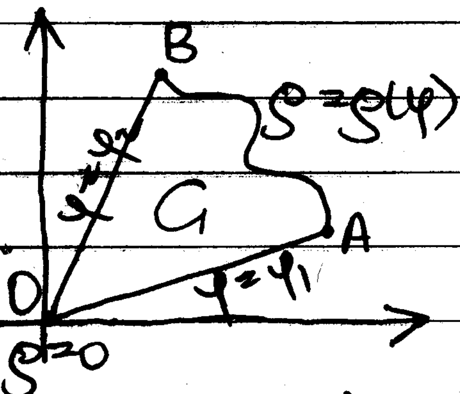
$$\frac{D(x,y)}{D(\rho\varphi)} = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & +\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$$



$$\Rightarrow ds = \rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$S(G) = \iint\limits_{g} \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} \rho\, d\varphi = \pi R^2$$

(2)



$$S(\overset{\frown}{OAB}) = \iint\limits_{G} dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{g} \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} \rho\, d\rho =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \cdot \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{\rho(\varphi)} = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\, d\varphi$$

§5 Тройной $\int$ал

Пусть T – куб-ое тело и пусть

$f(K) = f(x,y,z)$: $D_f \supset T$

$T = T_1 + \dots + T_n$, $V(T_i) \equiv \Delta V_i$

частичные тела

$\{T_1, \dots, T_n\} \equiv P(T)$ - разбиение T

$\{K_1, \dots, K_n\} \equiv \{K_i\} : K_i \in T_i$

- мн-во пром-х т-к разб $P[T]$

Опр $\sum\limits_{i=1}^{n} f(K_i)\Delta V_i \equiv I(P, K_i)$ - $\iiint$ая сумма ф-ии f

diam $T_i \equiv \Delta_i$, $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta_i \equiv \Delta(T)$ - диам $P[T]$

$$\lim_{\Delta \to 0} I(P, K_i) = \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_T f(M)\,dV$$

эл-т объёма

Геом смысл: $\iiint\limits_T dV = V(T)$

Физич смысл: $\iiint\limits_T \rho(M)\,dV = m(T)$

Повторные $\int$лы

Пусть $f(x,y,z): D_f \supset T = G \times [z_1(x,y), z_2(x,y)]$,

$z_i(x,y)$ - непр и $z_1(x,y) \le z_2(x,y)$ $\forall (x,y) \in G$,

G - кв-~~ое~~ая ~~мн-во~~ плоская ф-ра