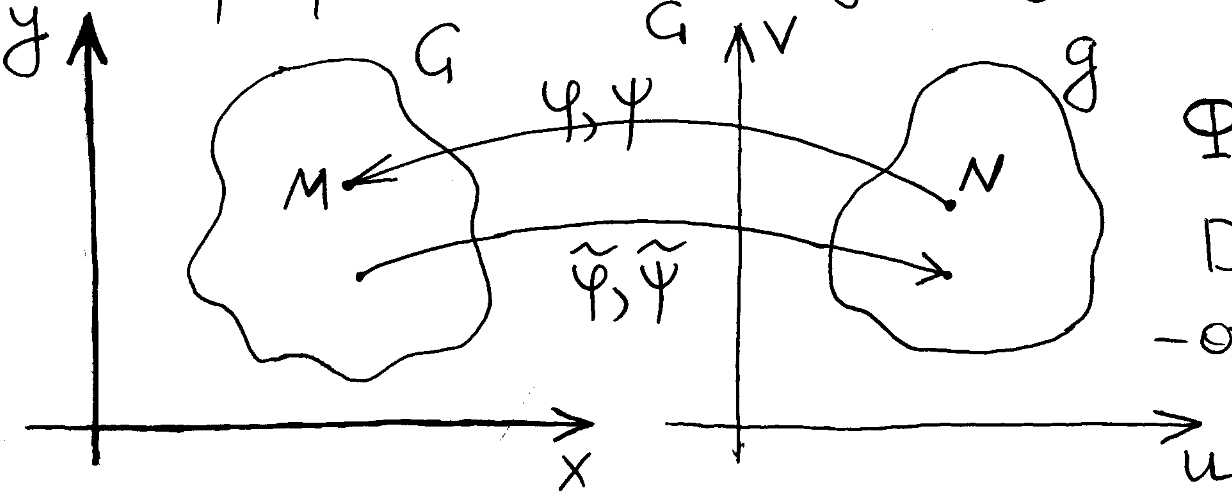
Лекция 16

Напомню, что

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\frac{d\varphi}{dt}dt, \quad a=\varphi(\alpha),\ b=\varphi(\beta)$$

Теперь рассм-м $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$



$\Phi=\{\varphi,\psi\}$: $D_\Phi = g$, $E_\Phi = G$ – отображение g на G

Будем считать, что $\exists\ \varphi$ и ψ: разным $N(u,v)\in g$ отвечают разные $M(\varphi(u,v),\psi(u,v))\in G$. Это значит, что

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u,v)\\ y &= \psi(u,v)\\ (x,y)&\in G\end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} u &= \tilde\varphi(x,y)\\ v &= \tilde\psi(x,y)\\ (u,v)&\in g\end{aligned}\right.$$

Доп-но:

Тогда вектор-ф-ию $\tilde\Phi=\{\tilde\varphi,\tilde\psi\}\equiv\Phi^{-1}$: $D_{\tilde\Phi}=G$, $E_{\tilde\Phi}=g$ наз-ют ~~тотображением~~ отображением, обратным к отображению Φ

Если сущ-ет Φ^{-1}, то говорят, что ото-бр-ие Φ опр-ет взаимно однозначное ~~соотв~~ соотв--ие между мн-ми g и G
$\llcorner$

Теорема 8 (о замене перем-х) Пусть:

1) G и g - квадр-ые обл-ти $\subset E^2$ (нап, что обл-ть - откр-ое связное мн-во)

2) $\begin{cases} \forall \text{т. } N(u,v) \Rightarrow \text{т. } M(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \in G \\ \forall \text{т. } M(x,y) \Rightarrow \exists! \text{ т. } N(u,v) \in g : x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v), \end{cases}$

т.е. ф-ии $x = \varphi(u,v)$ и $y = \psi(u,v)$ опр-ют взаимно однозначное отобр-ие обл-ти g на обл-ть G

3) ф-ии $\varphi, \psi \in C^1(g)$ (т.е. имеют непр-ые ЧП 1-го порядка в g)

4) якобиан $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$ и ограничен в обл g

Тогда, если $\exists \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy \cancel{\text{, то}} \equiv I_1$, то

1) $\exists \iint\limits_g \underbrace{f(\varphi(u,v), \psi(u,v))}_{F(u,v)} \left| \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du\,dv \equiv I_2$ и 2) $I_1 = I_2$

↑

"произв-ая" ф-ии $\{x,y\}$ по $\{u,v\}$

Зам Рав-во $I_1 = I_2$: **16.3**

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_g f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv \qquad (*)$$

наз формулой замены перем-ых

Геометр-ий смысл ф-лы замены перем-ых (эвристический вывод)

Перепишем ещё раз ф-лу (*) в виде

$$\iint\limits_G f(x,y)\,d\underline{\underline{S}} = \iint\limits_g f(u,v)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| d\bar{\bar{S}}$$

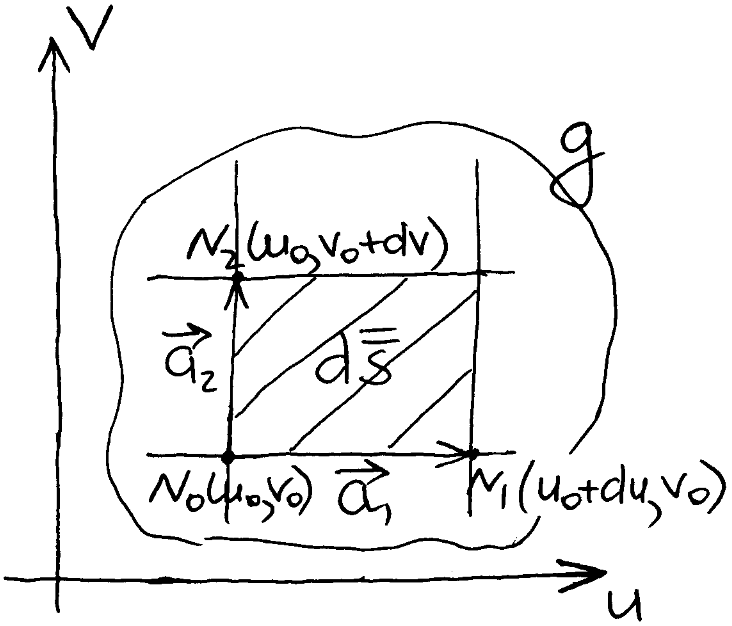
Геом смысл $d\underline{\underline{S}}$ – элемент площади на пл-ти XY, $d\bar{\bar{S}}$ – элемент площади на пл-ти UV

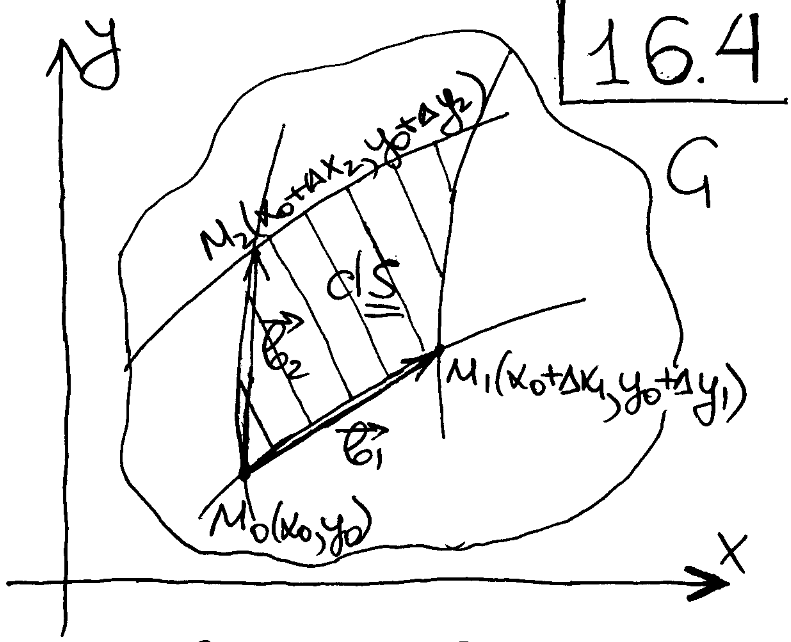
Из сравнения подынт-ых выр-ий замечаем, что

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{d\underline{\underline{S}}}{d\bar{\bar{S}}} = \frac{dx\,dy}{du\,dv}$$ – условные обозначения

Постараемся в это формальное соотношение вложить опр-ый геом-ий смысл (подчеркну, что послед-ие рассуждения не явл-ся строгим обосн-ием ф-лы замены перем-ых):

вложим геом-й смысл в это форм-ое соотн-ие





$\Delta u \equiv du$, $\Delta v \equiv dv$

$d\underline{\underline{S}}$ – криволин-ый парал-м (≈ настоящему парал-му при малых Δx_i и Δy_i)

$\varphi, \psi: M_0 \mapsto N_0,\ N_1 \mapsto M_1,\ N_2 \mapsto M_2$

$\vec{b}_1 = \{\Delta x_1, \Delta y_1\}$, $\vec{b}_2 = \{\Delta x_2, \Delta y_2\}$

$x_0 \equiv \varphi(u_0, v_0)$, $x_0 + \Delta x_1 \equiv \varphi(u_0 + du, v_0)$

$\Rightarrow \Delta x_1 = \varphi(u_0+du, v_0) - \varphi(u_0, v_0) \equiv \Delta\varphi(du, 0)\big|_{N_0} \approx$

$\approx d\varphi(du, 0)\big|_{N_0} = \varphi(u_0, v_0)\cdot du + \cancel{\varphi_y(u_0, v_0)}\cdot 0$

Ан-но $\Delta y_1 \approx \psi_u(u_0, v_0)\cdot du$

$x_0 \equiv \varphi(u_0, v_0)$, $x_0 + \Delta x_2 \equiv \varphi(u_0, v_0 + dv)$

$\Rightarrow \Delta x_2 = \varphi(u_0, v_0+dv) - \varphi(u_0, v_0) \equiv \Delta\varphi(0, dv)\big|_{N_0} \approx$

$\approx d\varphi(0, dv)\big|_{N_0} = \cancel{\varphi_u(u_0, v_0)}\cdot 0 + \varphi_v(u_0, v_0)\cdot dv$

Ан-но $\Delta y_2 \approx \psi_y(u_0, v_0) dv$

$d\overline{\overline{s}} = du\,dv$

вектор площади

$$d\underline{\underline{S}} = \left|[\vec{b}_1, \vec{b}_2]\right| = \underset{\text{модуль}}{\text{Abs}} \begin{vmatrix} \Delta x_1 & \Delta y_1 \\ \Delta x_2 & \Delta y_2 \end{vmatrix} \approx$$

$$\approx \text{Abs} \begin{vmatrix} \varphi_u(N_0)du & \psi_u(N_0)dv \\ \varphi_v(N_0)du & \psi_v(N_0)dv \end{vmatrix} = \text{Abs} \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix} \overset{>0}{du\,dv} =$$

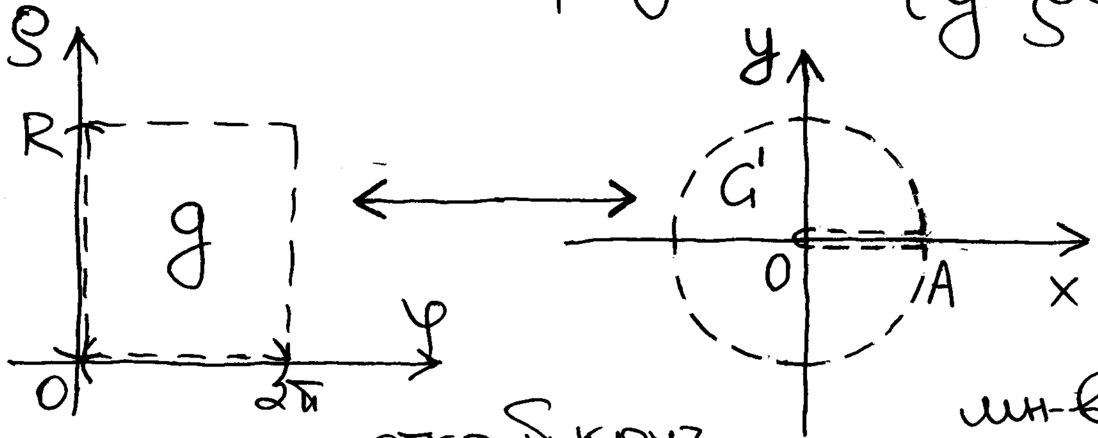
$$= \text{Abs} \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} d\overline{\overline{s}} = \left|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right|_{N_0} d\overline{\overline{s}} = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{N_0} d\overline{\overline{s}}$$

Т.о., $\overbrace{\text{якобиана}}^{\text{модуль}}$ – коэф-ент k растяжения эл-та площади $d\overline{\overline{s}}$ при отобр-ии $g \mapsto G$:

$k\, d\overline{\overline{s}} = d\underline{\underline{S}}$

① Площадь круга $\overline{G}: x^2+y^2 \leq R^2 = ?$

Рассм-м полярную СК $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$



$0 < \varphi < 2\pi$

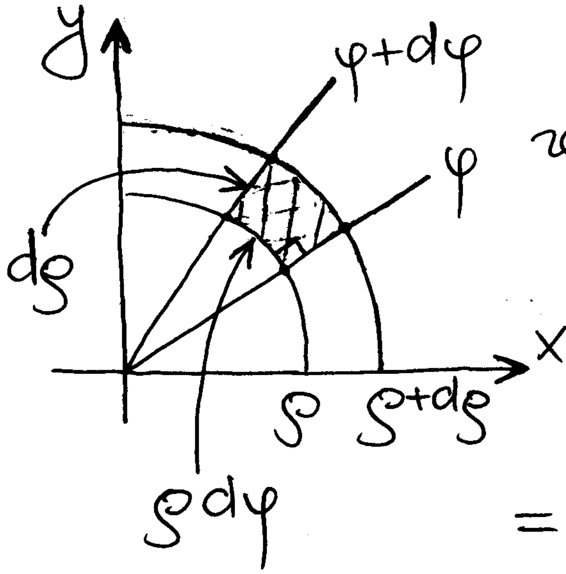
$0 < \rho < R$

$$\text{Круг } \overline{G} = \underset{\text{откр-й круг}}{G} + \text{окр-ть} = G' + \underbrace{\text{отр}[0,A) + \text{окр-ть}}_{\text{мн-ва площади нуль}}$$

$$\Rightarrow S(\overline{G}) = S(G') = \iint\limits_{G'} dx\,dy = \iint\limits_{g} \left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}\right| d\rho\, d\varphi$$

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}\right| = \mathrm{Abs}\begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{vmatrix} = \mathrm{Abs}\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & +\rho\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= |\rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi| = \rho$$



$$\Rightarrow dx\,dy = d\rho\,(\rho\,d\varphi) = \rho\,d\rho\,d\varphi$$

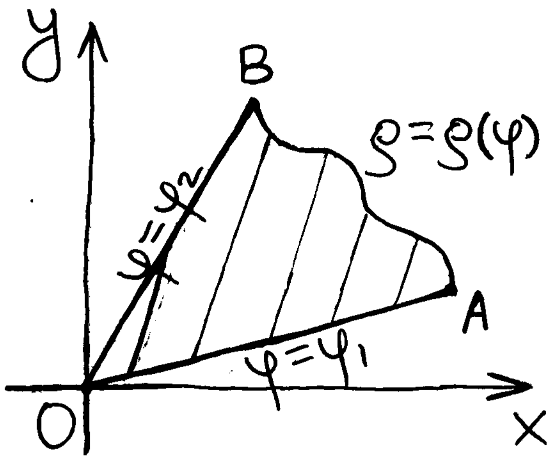
геом способ

с точностью до ∞-но малых более высокого пор-ка

$$S(G) = \iint\limits_{g} \rho\,d\rho\,d\varphi =$$

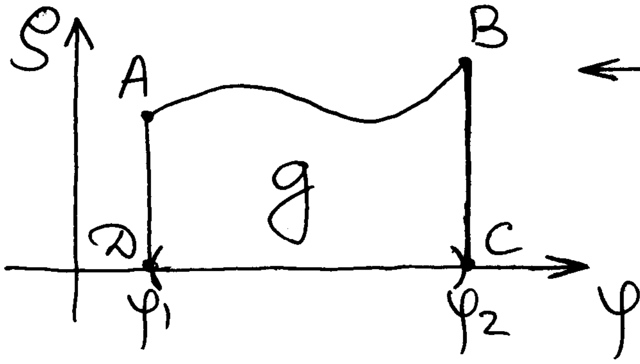
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^R \rho\,d\rho = 2\pi\frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

② Площадь кривол-го сектора



Пусть кривая AB задана в полярной СК: $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\varphi_1,\varphi_2]$

$G \equiv OAB$ – кривол-ый сектор



← В полярных коорд-ах сектор OAB – это кривол-ая трапеция $ABCD \equiv g$ – – ρ-трапециевидная обл-ть

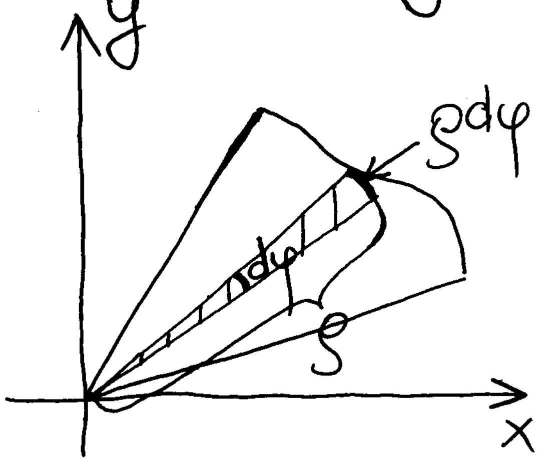
$$S(OAB)=\iint\limits_G dx\,dy=\iint\limits_g \rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} \rho\, d\rho = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \cdot \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{\rho(\varphi)} = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\, d\varphi$$

Зам Кв-ть OAB $\Leftrightarrow \exists \iint\limits_G dx\,dy \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \iint\limits_g \rho\, d\rho\, d\varphi \underset{\text{по теор 7.2}}{\Rightarrow} \exists \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\, d\varphi$ } Можно док-ть и в обратную сторону

Геом вывод



$$d\underline{\underline{S}} = \frac{1}{2}\rho(\rho\, d\varphi) = \frac{1}{2}\rho^2 d\varphi$$

$$\Rightarrow S(G) = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2}\rho^2(\varphi)\, d\varphi$$

§5 Тройной $\int$-ал

Пусть T – кубируемое тело и пусть $f(\mathbf{K}) = f(x,y,z): D_f \supset T$

$T = T_1 \cup \ldots \cup T_n$, $T_i \cap T_j = \varnothing \;\; \forall i \neq j$

частичные (кубируемые) тела $\quad V(T_i) \equiv \Delta V_i$

$\{T_i \mid i=\overline{1,n}\} \equiv P[T]$ - разбиение тела T $\boxed{16.8}$

$\forall i=\overline{1,n} \longmapsto K_i : K_i \in T_i$ ~~- промежуточные~~

промежуточные точки разбиения $P[T]$