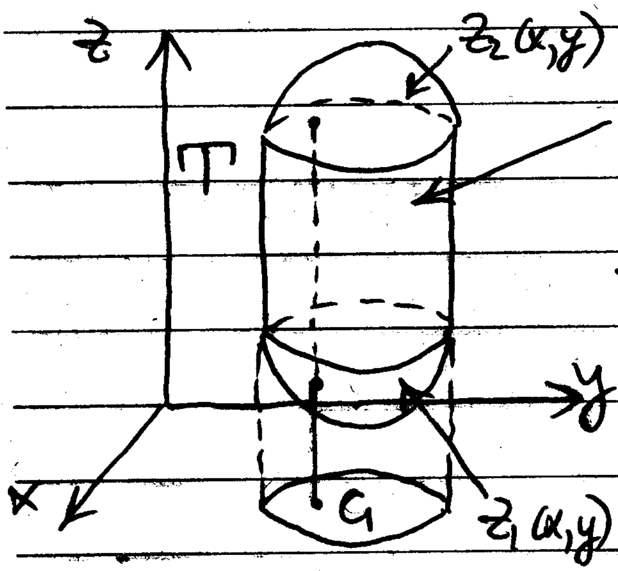
Геом смысл: $\iiint\limits_T dV = V(T)$

Физич смысл: $\iiint\limits_T \rho(M)\,dV = m(T)$

Повторные $\int$лы

Пусть $f(x,y,z)$: $D_f \supset T = G \times [z_1(x,y), z_2(x,y)]$,
$z_i(x,y)$ – непр и $z_1(x,y) \le z_2(x,y)$ $\forall (x,y) \in G$,
G – кв-ая пл-ая ф-ра



z – цилиндр-ое тело

Зам т.к. T = разности криволин-х цил-ов, то T – куб-мо

Теор 9.1 (о сведении $\iiint$ к $\iint + \int$) Пусть:

1) $\exists \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

2) $\forall (x,y) \in G \Rightarrow \exists \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \equiv I(x,y)$

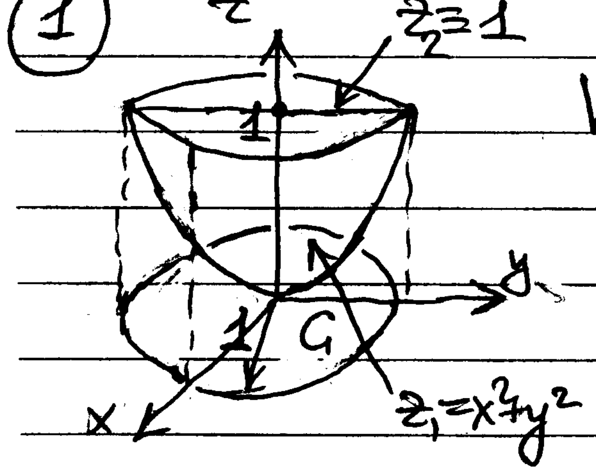
$$\Rightarrow \exists \iint\limits_G I(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_G \left[dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] =$$

$$= \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Δ Без док-ва

Зад-ие Сф-ть теор 9.1 для х- и у- цил-х тел

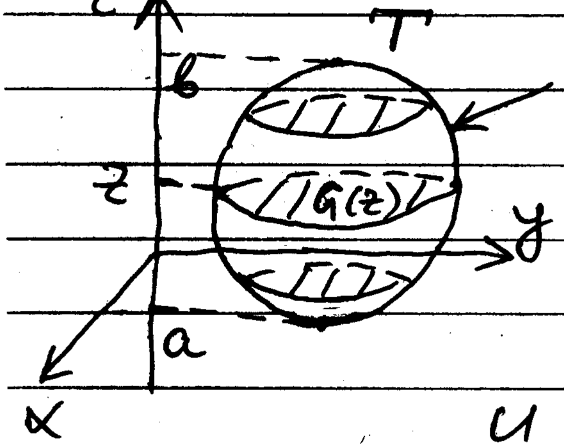
(1)



$$V=\iiint\limits_T dx\,dy\,dz=\iint\limits_G dx\,dy\int\limits_{x^2+y^2}^{1}dz=$$

$$=\iint\limits_G(1-\underbrace{x^2-y^2}_{\rho^2})\underbrace{dx\,dy}_{\rho\,d\rho\,d\varphi}=-\!\!-=\frac{\pi}{2}$$

Пусть $f(x,y,z)$: $D_f\supset T=G(z)\times[a,b]$, $G(z)$ - кв-ое пл-ие ф-ры



ху - цилиндр-ое тело

Зам Исп-я крит куб-ти, можно Δ-ть, что T-куб-мо и $V(T)=\int\limits_a^b S(z)dz$, $S(z)\equiv S(G(z))$

Теор 9.2 (о сведении $\iiint$ к $\int+\iint$) Пусть:

1) $\exists\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

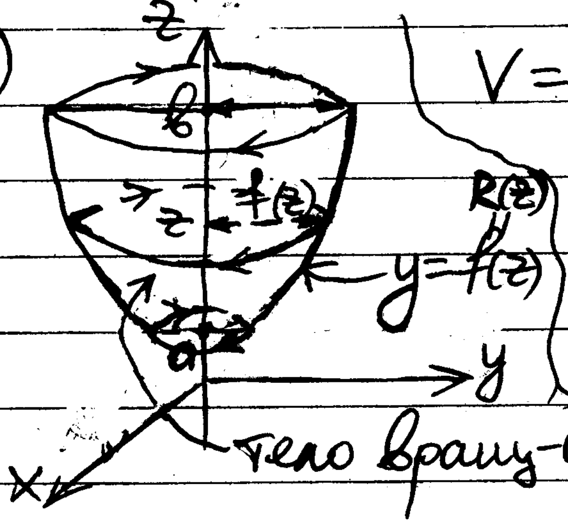
2) $\forall z\in[a,b]\Rightarrow\exists\iint\limits_{G(z)}f(x,y,z)\,dx\,dy\equiv I(z)$

$$\Rightarrow\exists\int\limits_a^b I(z)dz\equiv\int\limits_a^b dz\left[\iint\limits_{G(z)}f(x,y,z)\,dx\,dy\right]=\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Δ Без док-ва

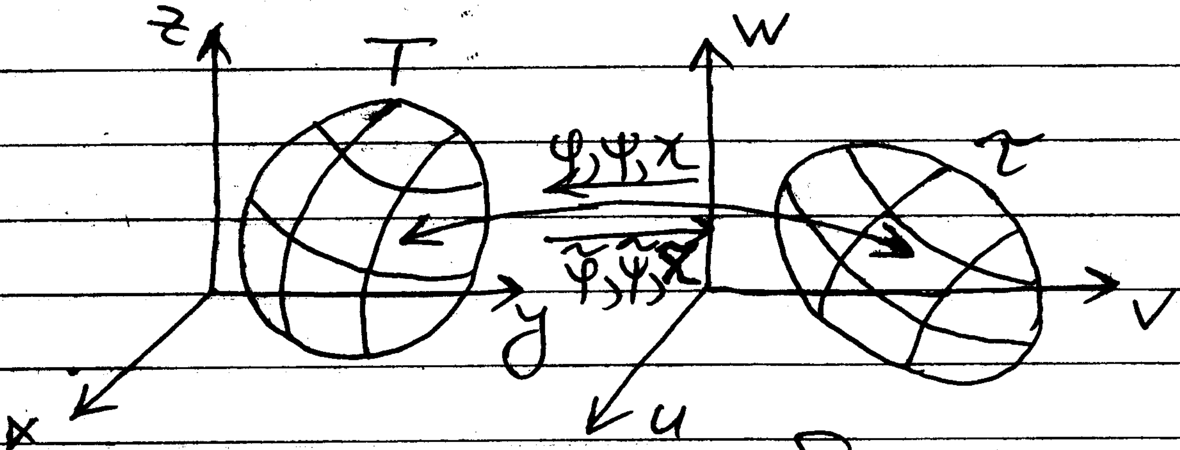
Зад-ие Сф-ть теор 9.2 для xz- и yz- цил-х тел

(2)



$$V=\iiint_T dx\,dy\,dz=\int_a^b dz\iint_{G(z)} dx\,dy=\int_a^b S(z)\,dz=\int_a^b \pi R^2(z)\,dz=\pi\int_a^b f^2(z)\,dz$$

Замена перем-х



Пусть T и τ - куб-ые ~~тела~~ обл и пусть ф-ии $x=\varphi(u,v,w)$, $y=\psi(u,v,w)$, $z=\chi(u,v,w)$ уст-ют вз-но одн-ое соотв-ие (отобр) между τ и T

Теор 10 (о замене пер-х в $\iiint$) Пусть:

1) $\varphi,\psi,\chi\in C^1(\tau)$

2) $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\neq 0$ и огр в τ

3) $\exists\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

пробелы

$$\Rightarrow \exists \iiint\limits_{\tau} f(\varphi(u,v,w), \psi(\cancel{u,v,w}), \chi(\cancel{u,v,w})) \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw \overset{16.4}{=}$$

$$\Leftarrow = \iiint\limits_{T} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

③ Цилиндр-ие к-ты $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{matrix}}^{=\rho} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

~~Δ-те, что~~

Δ-те, что $V_{кон} = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$ ↓

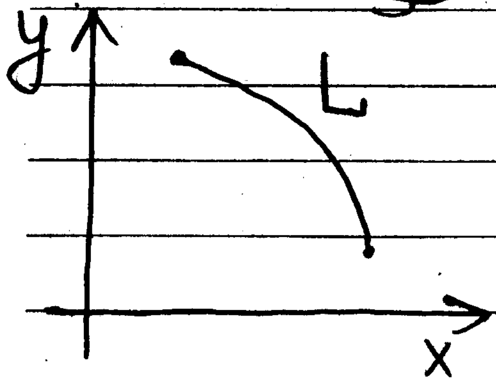
④ Сферич-ие к-ты $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

$$V_{шара} = \iiint\limits_{T} dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\tau} \left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}\right| dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\,d\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Глава XII Криволин-ые $\int$-лы

§1 Длина кривой



Опр Непр кривой в E^2 наз $\{M(x,y) \mid x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [\alpha,\beta]\} \equiv L$, где $\varphi, \psi \in C[\alpha,\beta]$

Нап, что $M^t \equiv M(\varphi(t), \psi(t))$ – произв т-ка кр-й

Опр Т. $M \in L$ наз простой, если ~~1) простой, если~~ $\exists!\, t \in [\alpha, \beta]: M = M^t$ (частный случай особых)

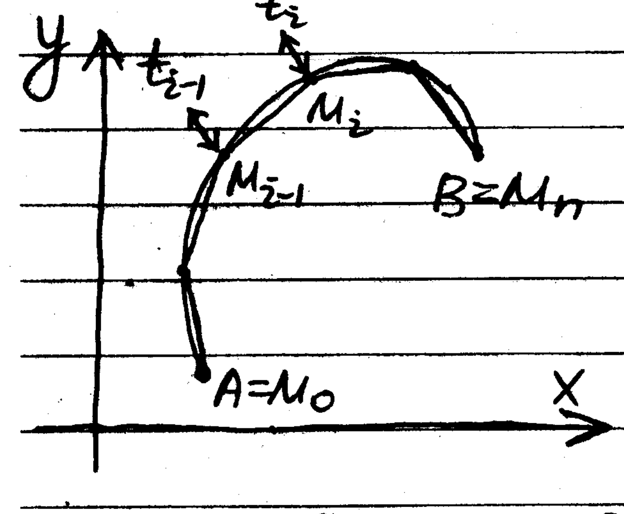
("непростые" т-ки наз кратными – ~~2) кратной, если $\exists\, t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]: t_1 \neq t_2$ и (иначе~~ $M^{t_1} = M^{t_2} = M$ самопересеч, наложение и т.д.)

Опр Непр кривая наз

1) простой незамкн кр-й, если все её т-ки простые

2) простой замкн кр-й, если $\underset{B}{M^\alpha} = \underset{A}{M^\beta}$ и если все её т-ки за искл-м концов – простые (напр, окр)

Пусть $L \equiv \overset{\frown}{AB}$ – простая кривая (A может $= B$)



$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$$
$$\downarrow \quad \updownarrow \quad \quad \updownarrow \quad \downarrow$$
$$M_0 \quad M_1 \quad \quad M_{n-1} \quad M_n$$

т.е. $M_i \equiv M^{t_i} = M(\varphi(t_i), \psi(t_i))$

$$\underset{\text{разб } [\alpha,\beta]}{T[\alpha,\beta] \equiv \{t_1, \ldots, t_{n-1}\}} \longleftrightarrow \underset{\text{разб } L}{\widetilde{T}[L] \equiv \{M_1, \ldots, M_{n-1}\}}$$

~~$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ – i-я част-я дуга кр-й L~~

Обозн-м $M_{i-1}M_i$ – i-е звено лом-й $AM_1 \ldots M_{n-1}B$

~~Обозн-м~~

$\Delta l_i = \rho(M_{i-1}, M_i) = \sqrt{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi \quad]^2}$

$l(T) = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$ — длина лом-й

$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $\Delta(T) = \max_{1\le i\le n} \Delta t_i$ — диам $T[\alpha,\beta]$

Опр Число l наз lim-м длин лом-х $l(T)$ при $\Delta \to 0$, если
$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall T[\alpha,\beta] : \Delta(T) < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |l(T) - l| < \varepsilon$

Обозн $\lim_{\Delta\to 0} l(T) = l$

Опр Если сущ $\lim_{\Delta\to 0} l(T) \equiv l$, то кр-я L наз спрямл-ой, а число l наз длиной кр-й L (длиной дуги) Расск-ть про Декарта

Теор 1 (о спрям-ти кривой)
Пусть простая кривая
$L = \{M(\varphi(t), \psi(t)) \mid t \in [\alpha,\beta]\} : \varphi, \psi \in C^1[\alpha,\beta]$
$\Rightarrow$ 1) она спр-ма и 2) $\underset{\text{путь}}{l} = \int_\alpha^\beta \underbrace{\sqrt{\dot\varphi^2(t) + \dot\psi^2(t)}}_{v(t)}\, \underset{\text{время}}{dt}$

Лемма $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}\right| \le |a-c|+|b-d|$ (*) 16.7

Δ Если $a=b=c=d=0$, то $0=0$, иначе

$$\frac{\left|\sqrt{\ }-\sqrt{\ }\right|}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }}(\sqrt{\ }+\sqrt{\ }) \overset{\text{#a}}{=} \frac{\left|\sqrt{\ }^2-\sqrt{\ }^2\right|}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }} =$$

$\ne 0$

$$= \frac{|a^2-c^2+b^2-d^2|}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }} \le \frac{|a^2-c^2|}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }} + \frac{|b^2-d^2|}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }} \le$$

$$\le |a-c|\underbrace{\frac{|a|+|c|}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }}}_{\le 1} + |b-d|\underbrace{\frac{|b|+|d|}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }}}_{\le 1} \le |a-c|+|b-d|$$

$\cancel{\Delta}$

Δ Теор 1. По опр $l = \lim\limits_{\Delta\to 0} l(T)$

$\Rightarrow$ нужно д-ть, что $\lim\limits_{\Delta\to 0} l(T) = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2}\,dt \equiv I$

$\Leftrightarrow l(T) - I \to 0$, $\Delta \to 0$

Нап, что $l(T) \equiv \sum\limits_{i=1}^n \Delta l_i = \sum\limits_{i=1}^n \rho(M_{i-1}, M_i) =$

$$= \sum_{i=1}^n \sqrt{[\underbrace{\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})}_{\dot\varphi(\xi_i)\Delta t_i}]^2 + [\underbrace{\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})}_{\dot\psi(\eta_i)\Delta t_i}]^2} =$$

ф-ла Л-жа, $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$

$$= \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot\varphi^2(\xi_i)+\dot\psi^2(\eta_i)}\,\Delta t_i \qquad (1)$$

По аддит св-ву ф-ла