Лекция 17

Опр $\sum\limits_{i=1}^{n} f(K_i)\cdot \Delta V_i \equiv I(P, K_i)$ – $\iiint$я сумма ф-ии f

$\Delta_i \equiv \mathrm{diam}\, T_i$

$\max\limits_{1\le i\le n} \Delta_i \equiv \Delta(P)$ – диаметр $P[T]$

$$\lim_{\Delta\to 0} I(P, K_i) \equiv \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz \equiv \iiint\limits_T f(K)\,dV$$

элемент объёма тела T

Геом смысл $\iiint\limits_T dxdydz = V(T)$

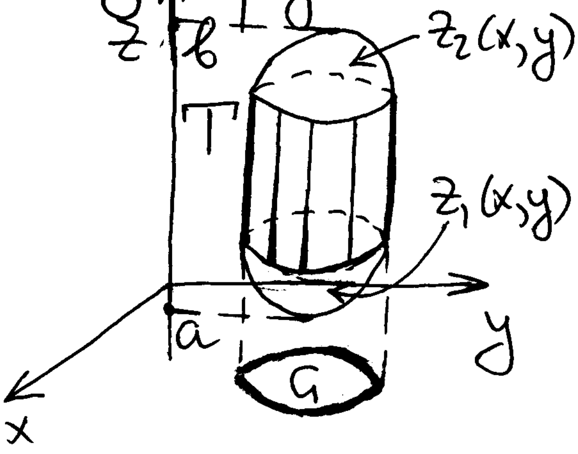
Физич-й смысл $\iiint\limits_T \rho(x,y,z)\,dxdydz = m$

ρ – пл-ть, m – масса

Повторные $\int$-лы

~~Пусть $f(x,y): D_f \supset T$~~

Кубируемое тело $T = G\times[z_1(x,y), z_2(x,y)]$,



где G – квадр-ая пл-ая фигура, наз z-цилиндрическим телом (цилиндр-им по z)

Пусть $f(x,y,z)$: $D_f \supset$ z-цилинд-ое тело T

Теор 9.1 (о сведении $\iiint$ к $\iint + \int$) Пусть:

1) $\exists \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

2) $\forall (x,y) \in G \Rightarrow \exists \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \equiv I(x,y)$

Тогда

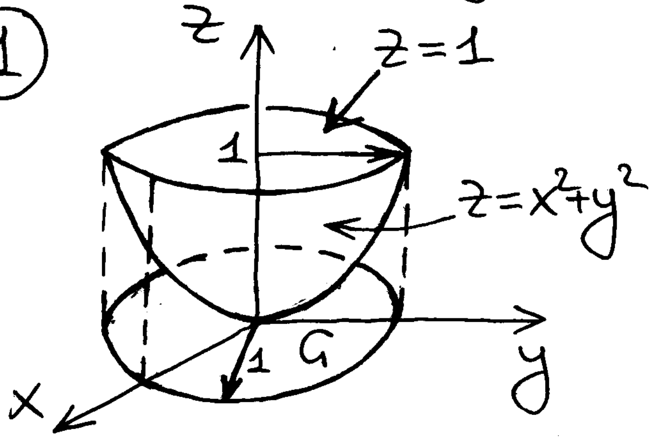
$$\exists \iint\limits_G I(x,y)\,dx\,dy \equiv \iint\limits_G \left[dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] =$$

$$= \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Δ Без док-ва

Зад-ие Сформулир-ть теорему для случая x- и y- цилиндр-их областей

① Объём = ?



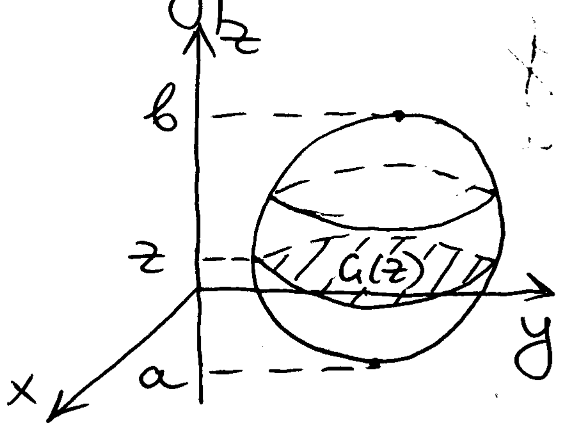
$$V = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_G dx\,dy \int\limits_{x^2+y^2}^{1} dz = \iint\limits_G (1-x^2-y^2)\,\underbrace{dx\,dy}_{=\rho\,d\rho\,d\varphi} =$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} [(1-\rho^2)\cdot\rho]\, d\varphi =$$

$$= \int_0^1 (\rho^2-\rho)\, d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Кубируемое тело $T = G(z)\times[a,в]$, где $G(z)$ – квадр-ые плоские фигуры, наз xy-цилиндр-им телом (цилиндр-м по xy)



Пусть $f(x,y,z)$: $D_f \supset xy$-цилиндр-ое тело T

Теор 9.2 (о сведении $\iiint$ к $\int + \iint$) Пусть:

1) $\exists \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

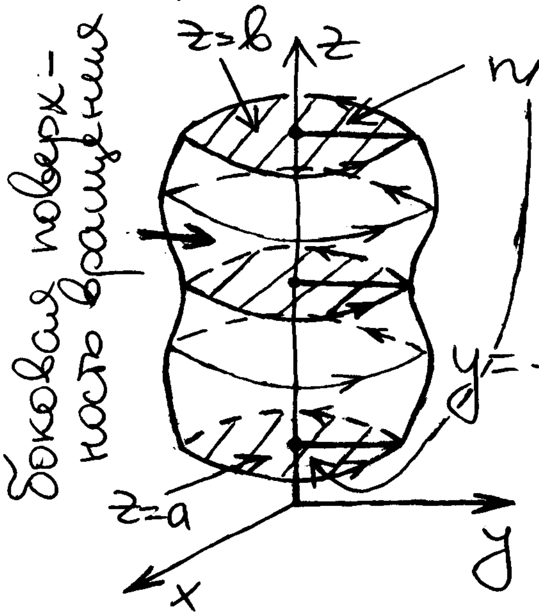
2) $\forall z\in[a,в] \Rightarrow \exists \iint\limits_{G(z)} f(x,y,z)\,dx\,dy \equiv I(z)$

Тогда

$$\exists \int_a^в I(z)\,dz \equiv \int_a^в \left[dz \iint\limits_{G(z)} f(x,y,z)\,dz\right] = \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Зад-ие Сформулир-ть теорему для случая xz- и yz- цилиндр-их областей

(2) Тело вращения

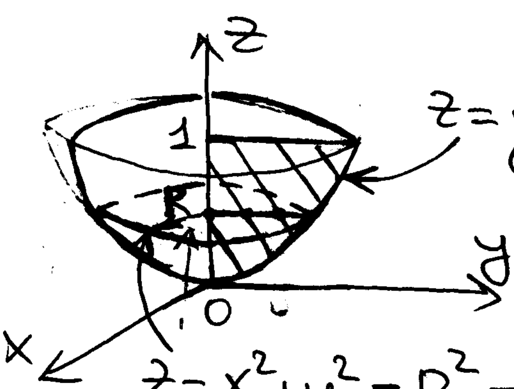


$y=f(z)=R(z)$

пл-дь $G(z)$

$$\mathbf{V}=\iiint_T dxdydz = \int_a^b dz \iint_{G(z)} dxdy = \int_a^b S(z)dz = \int_a^b \pi R^2(z)dz = \pi\int_a^b f^2(z)dz$$

В частности

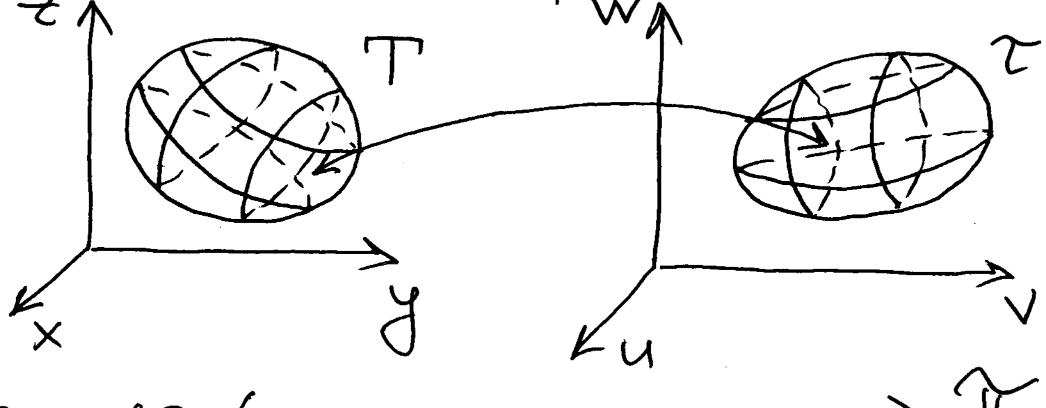


$$z=y^2 \Rightarrow y=\sqrt{z}=f(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{V}=\pi\int_0^1 z\,dz=\frac{\pi}{2}$$

$$z=x^2+y^2=R^2 \Rightarrow R=\sqrt{z}$$

Замена переменных



Теор 10 (о замене перем-х) Пусть:

1) T, τ — кубируемые области $\subset E^3$

2) ф-ии $x=\varphi(u,v,w)$, $y=\psi(u,v,w)$, $z=\chi(u,v,w)$ опр-ют взаимно однозн-ое отобр-ие тела τ на тело T

3) $\varphi, \psi, \chi \in C^1(\tau)$

4) $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \neq 0$ и ограничен в теле τ

Тогда

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_\tau f(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \chi(u,v,w)) \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

(при этом из $\exists$-ия левого $\int$-ла вытекает $\exists$-ие правого)

③ Цилиндрические координаты

$x = \rho\cos\varphi$
$y = \rho\sin\varphi$
$z = z$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi & 0 \\ y_\rho & y_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

$=\rho$

Зад-ие Док-ть, что $V_{цил} = \pi R^2 \cdot h$

④ Сферические координаты

$x = r\sin\theta\cos\varphi$
$y = r\sin\theta\sin\varphi$
$z = r\cos\theta$

В декарт-х коорд-х

Шар $\equiv T = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$

В сферич-х коорд-х

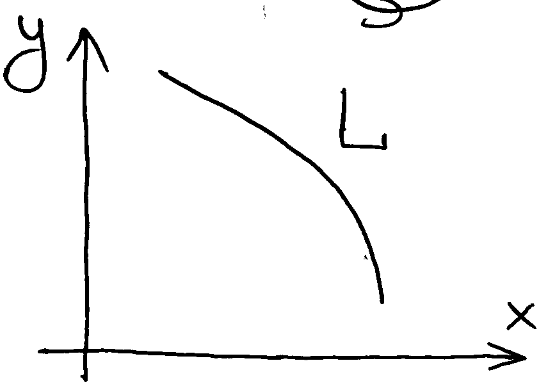
Шар $\equiv \tau = \{(r,\theta,\varphi) \in [0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]\}$

$$V_{\text{шара}} = \iiint\limits_{\tau} \underbrace{\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}\right|}_{r^2\sin\theta} dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^R \cancel{r} dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\, d\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Глава XII Криволинейные ∫-лы

§1 Длина кривой



Опр Непр-ой кривой в E^2 наз-ся мн-во

$\{M(x,y,\cancel{z}) \mid x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in[\alpha,\beta]\} \equiv L$,

где $\varphi, \psi \in C[\alpha,\beta]$ — пришло из геометрии.

(рассказать про кривую Пеано)

Доп-но:

В строгом смысле (в анализе) непр-ая кривая – это ф-ия: $t \to M^t \equiv M(\varphi(t), \psi(t))$

Опр Т. $M \in L$ наз-ся

простой, если $\exists!\, t \in [\alpha, \beta] : M = M^t$

кратной, если $\exists t_1, t_2 \in [\alpha, \beta] : \begin{cases} t_1 \neq t_2 \\ M^{t_1} = M^{t_2} = M \end{cases}$

(геом-ий смысл кратности – самопересечение, наложение и т.д.)

Опр Непр-я кривая наз-ся

1) простой незамкнутой кривой, если все её точки простые

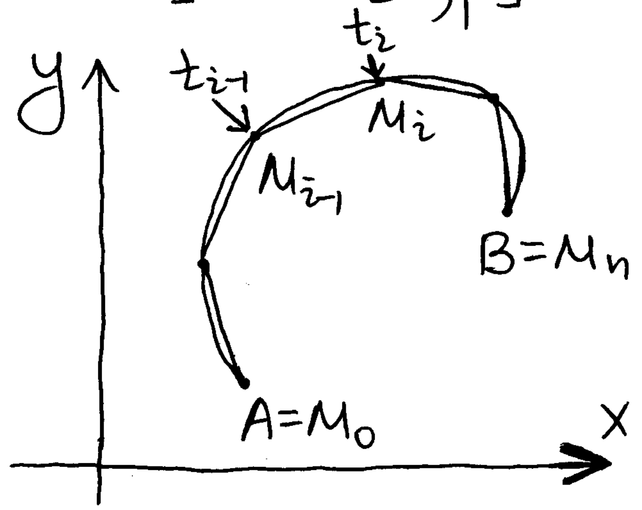
2) простой замкнутой кривой, если $\underset{A}{M^\alpha} = \underset{B}{M^\beta}$ и если все её точки за исключением концов простые (напр, окр-ть)

Утв Простая замкнутая кривая явл-ся границей некоторой обл-ти G

Зам Далее под простой кривой будем подразум-ть как замкнутую, так и незамкнутую ~~простые~~ простую ~~кривые~~ кривую

Пусть L – простая (замкнутая или незамкнутая) кривая

Разбиение $T[\alpha,\beta]$ порождает разбиение $T[L]$: $T[\alpha,\beta] \longleftrightarrow T[L]$



$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha = t_0 & < & t_1 & < \ldots < & t_{n-1} & < & t_n = \beta \\ \downarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \downarrow \\ M_0 & & M_1 & & M_{n-1} & & M_n \end{array}$$

т.е. $M_i \equiv M^{t_i} = M(\varphi(t_i), \psi(t_i))$

$$T[\alpha,\beta] \equiv \{t_1, \ldots, t_{n-1}\}, \quad T[L] \equiv \{M_1, \ldots, M_{n-1}\}$$

$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ – частичная дуга кривой L

$M_{i-1}M_i$ – i-ое звено ломаной $AM_1 \ldots M_{n-1}B$

$$\Delta l_i \equiv \rho(M_{i-1}, M_i) = \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}$$

$l(T) \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta l_i$ – длина ломаной

$\Delta \equiv \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta t_i, \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

– диаметр $T[\alpha,\beta]$, $\Delta = \Delta(T)$

Опр Число l наз-ся пределом длин ломаных $l(T)$ при $\Delta \to 0$, если

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall T[\alpha, \beta] : \Delta(T) < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |l(T) - \boldsymbol{l}| < \varepsilon$

Обозн $\lim\limits_{\Delta \to 0} l(T) = l$

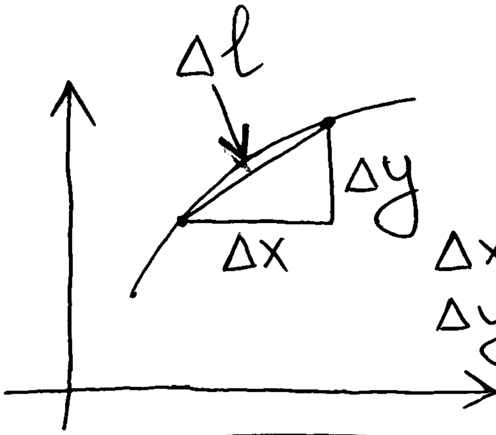
если ∃-ет, то l – длина кривой L (длина дуги), а сама кривая – спрямляемая

Рассказать про Декарта (о богах и животных)

Теор 1 (о спрямляемости кривой)
Пусть простая кривая
$L = \{M(\varphi(t), \psi(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\} : \varphi, \psi \in C^1[\alpha, \beta]$.
Тогда она спрямляема и её длина

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)}\, dt$$

Геом иллюстрация утв-ия теоремы:



$\Delta x \approx dx$
$\Delta y \approx dy$

$$\Delta l \approx \rho(M_{i-1}, M_i) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \approx \sqrt{dx^2 + dy^2} = dl$$

$$l(T) = \sum \Delta l_i$$

$\downarrow$ l $\qquad$ $\downarrow$ $\int dl$ $\leftarrow$ при уменьшении разбиения ($\Delta \to 0$)

17.10

$$l=\int_A^B dl = \int_A^B \sqrt{dx^2+dy^2} = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot\varphi^2 dt^2+\dot\psi^2 dt^2} = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2}\,dt$$

Δ Нужно док-ть, что

$$\exists \lim_{\Delta\to 0} l(T) \equiv l = I \equiv \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2}\,dt \qquad (0)$$

По т-ме Лагранжа $\forall i=\overline{1,n} \Rightarrow \exists\, \xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$:

$\Delta x_i \equiv \varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}) = \dot\varphi(\xi_i)\Delta t_i$ Вообще говоря,

$\Delta y_i \equiv \psi(t_i)-\psi(t_{i-1}) = \dot\psi(\xi_i)\Delta t_i$ $\xi_i \neq \eta_i$

$$\Rightarrow l(T) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot\varphi^2(\xi_i)+\dot\psi^2(\eta_i)}\,\Delta t_i \qquad (1)$$

Рассм-м ф-ию $f(t)\equiv\sqrt{\dot\varphi^2(t)+\dot\psi^2(t)}$ и введём обозначения

$\{\xi_1,\dots,\xi_n\} \equiv \{\xi_i\}$ — те самые точки, что и в (1)

$$I(T,\xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta t_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot\varphi^2(\xi_i)+\dot\psi^2(\xi_i)}\,\Delta t_i \qquad (2)$$

— $\int$ая Σ-а ф-ии f

Т.к. φ и ψ — фиксир-ые ф-ии, то ξ_i из т-мы Лагранжа можно рассм-ать как заданные ф-ии огр-в $[t_{i-1}, t_i]$. Тогда **17.11**

$$\forall T[\alpha,\beta] \to \{\xi_i\} \Rightarrow I(T,\xi_i) = \underset{\text{в}}{I}(T, \xi_i(T)) \equiv I(T)$$

Далее, из $f \in C[\alpha,\beta] \Rightarrow f$ – $\underset{\text{а}}{\overset{\text{в}}{\int}}$ма $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \lim_{\Delta\to 0} \underset{\uparrow}{I(T,\xi_i)} = \lim_{\Delta\to 0} \underset{\uparrow}{I(T, \xi_i(T))} =$$

при произв выборе ξ_i при фиксир-м (специальном) выборе ξ_i

$$= \int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\psi^2}\,dt \equiv I \overset{(\omega)}{=} l \equiv \lim_{\Delta\to 0} l(T)$$

надо док-ть

Для этого нам дост-но убедиться в том, что

$$\exists \lim_{\Delta\to 0} [l(T) - \underbrace{I(T)}_{\exists\text{-ет}}] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim l(T) = \lim I(T)$$