$$I=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\quad}\,dt=\int_{t_0}^{t_1}+\int_{t_1}^{t_2}+\dots+\int_{t_{n-1}}^{t_n}=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2}\,dt \quad (1)$$

По ф-ле ср-го зн-ия для $\int$ла от непр ф-ции

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i}\underbrace{\sqrt{\dot\varphi^2(t)+\dot\psi^2(t)}}_{f(t)-\text{непр}}\,dt=f(\underset{[t_{i-1},t_i]}{\zeta_i})(t_i-t_{i-1})=$$

$$=\sqrt{\dot\varphi^2(\zeta_i)+\dot\psi^2(\zeta_i)}\,\Delta t_i\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\dot\varphi^2(\zeta_i)+\dot\psi^2(\zeta_i)}\,\Delta t_i \qquad (2)$$

(1)–(2) и берем $|\ |$, имеем

$$|l(T)-I|=\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\quad}\,\Delta t_i-\sqrt{\quad}\,\Delta t_i\right)\right|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\left|\sqrt{\underset{a}{\dot\varphi^2(\xi_i)}+\underset{b}{\dot\psi^2(\eta_i)}}-\sqrt{\underset{c}{\dot\varphi^2(\zeta_i)}+\underset{d}{\dot\psi^2(\zeta_i)}}\right|\Delta t_i\le$$

$$\overset{(*)}{\le}\sum_{i=1}^{n}\left\{|\dot\varphi(\xi_i)-\dot\varphi(\zeta_i)|+|\dot\psi(\eta_i)-\dot\psi(\zeta_i)|\right\}\Delta t_i \qquad (3)$$

Т.к. $\dot\varphi,\dot\psi\in C[\alpha,\beta]\Rightarrow$ (по т. Кантора)

$\dot\varphi,\dot\psi$ равн непр на $[\alpha,\beta]$:

$$\forall\varepsilon>0\Rightarrow\exists\delta_1>0:\forall\xi,\zeta\in[\alpha,\beta]:|\xi-\zeta|<\delta_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|\dot\varphi(\xi)-\dot\varphi(\zeta)|<\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)} \qquad (4.1)$$

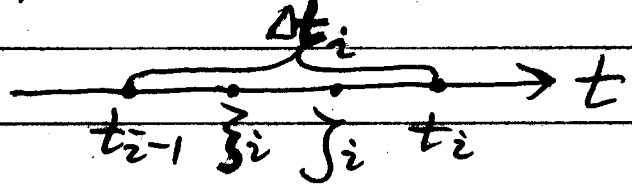
$$\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists \delta_2>0 : \forall \eta, \zeta \in [\alpha,\beta] : |\eta-\zeta|<\delta_2 \Rightarrow \quad 17.2$$

$$\Rightarrow |\dot\psi(\eta)-\dot\psi(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)} \qquad (4.2)$$

Нам надо д-ть, что $\ell(T)-I \to 0$, $\Delta \to 0$, т.е., что

$$\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists \delta>0 : \forall T[a,b] : \Delta(T)<\delta \Rightarrow |\ell(T)-I|<\varepsilon$$

Зафикс $\forall \varepsilon>0$, пол-м $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ и зафикс $\forall T[a,b] : \Delta(T)<\delta$. Тогда



$$\left.\begin{aligned} &1)\ |\xi_i-\zeta_i| \le \Delta t_i \le \Delta(T) < \delta \le \delta_1 \overset{(4.1)}{\Longrightarrow} \\ &\Rightarrow |\dot\varphi(\xi_i)-\dot\varphi(\zeta_i)| < \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)} \\ &2)\ |\eta_i-\zeta_i| < \delta_2 \overset{(4.2)}{\Longrightarrow} |\dot\psi(\eta_i)-\dot\psi(\zeta_i)| < \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)} \end{aligned}\right\} (5)$$

Т.о. $|\ell(T)-I| \overset{(3)}{\le}$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \Big\{ \underbrace{|\dot\varphi(\xi_i)-\dot\varphi(\zeta_i)|}_{<\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}} + \underbrace{|\dot\psi(\eta_i)-\dot\psi(\zeta_i)|}_{<\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}} \Big\} \Delta t_i \overset{(5)}{<}$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha} \Delta t_i = \frac{\varepsilon}{\cancel{\beta-\alpha}} \cdot \cancel{(\beta-\alpha)} = \varepsilon \text{ чтд } \triangle$$

Зам ~~В случае кривой~~ Если Γ L: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\chi(t) \end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$

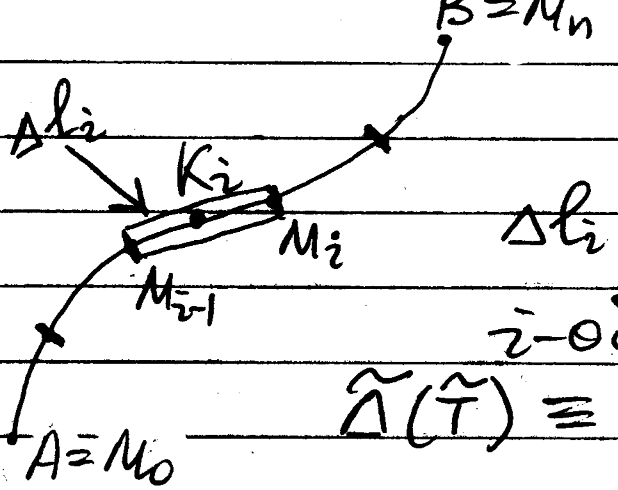
$$\Rightarrow l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2+\dot\chi^2}\,dt$$

§2 Крив-ые $\int$-лы I-го рода

Пусть L – простая спрямл-ая кривая:

$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$ и пусть $f(M)=f(x,y)$:

$D_f\supset L=\overset{\frown}{AB}$



$T[\alpha,\beta]\Leftrightarrow\tilde T[L]$

$\Delta l_i\equiv\rho(\overset{\frown}{M_{i-1},M_i})$ – длина i-ой частичной дуги

$\tilde\Delta(\tilde T)\equiv\max\limits_{1\le i\le n}\Delta l_i$ – диам $\tilde T$ ~~[L]~~

Пусть $\{K_1,\dots,K_n\}\equiv\{K_i\}$: $K_i\cancel{(\xi_i,\zeta_i)}\in\overset{\frown}{M_{i-1},M_i}$

– мн-во пром-х т-к разб $\tilde T$~~[L]~~

$$\Rightarrow I(\tilde T,K_i)\equiv\sum_{i=1}^n f(K_i)\Delta l_i$$ – $\int$-ая Σ-а для ф-ии f

Опр ~~Если~~ $\exists\lim\limits_{\tilde\Delta\to0}I(\tilde T,K_i)$, ~~то он наз~~ крив-й $\int$-ал I-го рода от ф-ии f по кр-й L

Обозн $\int\limits_L f(x,y)\,dl$ или $\int\limits_{AB}f(x,y)\,dl$

Зад-ие. Дать опр $\lim\limits_{\Delta\to 0} I(\tilde{T}, K_i)$ в "ε–δ" 17.4

Опр Простая кр-я $L = \{M(\varphi(t), \psi(t)) \mid t\in[\alpha,\beta]\}$ (*) наз гладкой, если:

1) $\varphi, \psi \in C^1[\alpha,\beta]$

нет особых т-к

2) $\forall t\in[\alpha,\beta] \Rightarrow \dot\varphi^2(t)+\dot\psi^2(t)\neq 0$

(Геом смысл — непр изм-ие напр-я касат-й)

Теор 2 (о сведении $\int dl$ к $\int dt$) Пусть:

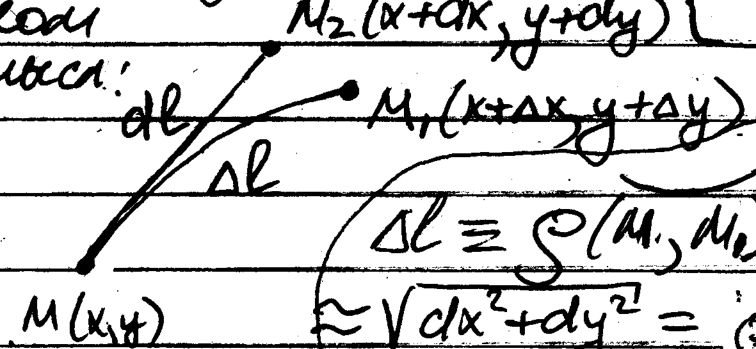
1) L — простая гл-ая кривая (*)

2) $f(x,y)$ непр на L

$$\Rightarrow \exists \int_L f(x,y)\,dl = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\underbrace{\sqrt{\dot\varphi^2(t)+\dot\psi^2(t)}\,dt}_{dl\text{ — дифф-л дуги}}$$

Δ Без док-ва

Геом смысл:



$$\Delta l \equiv \rho(M, M_1) \approx \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \approx \sqrt{dx^2+dy^2} = \rho(M, M_2) \equiv dl$$

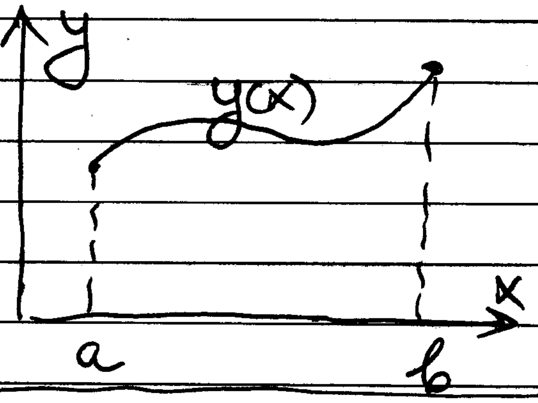
$$\sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{(\dot\varphi\,dt)^2+(\dot\psi\,dt)^2} = \sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2}\,dt$$

Форм-а вывод:

$$dl(t) = d\int_\alpha^t \sqrt{\dot\varphi^2(\tau)+\dot\psi^2(\tau)}\,d\tau = \sqrt{\dot\varphi^2(t)+\dot\psi^2(t)}\,dt$$

произ-я пр-в

~~Зам~~ Сл-ия

1) 

$y=y(x),\ x\in[a,b]$

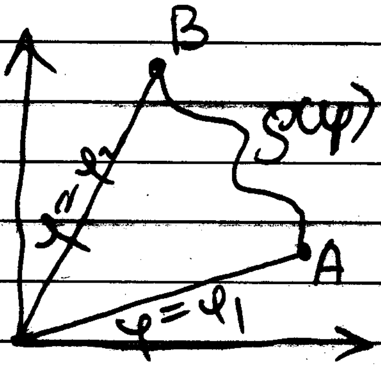
$\begin{cases} x=t\equiv\varphi(t) \\ y=y(t)\equiv\psi(t) \end{cases} \quad t\in[a,b]$

$\dot\varphi(t)\equiv 1,\ \dot\psi(t)=\dot y(t)=y'(x)$

$\Rightarrow dl=\sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2}\,dt=\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$

или $dl=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

$\Rightarrow \int\limits_{AB} f(x,y)\,dl=\int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$

2) 

$\rho=\rho(\varphi),\ \varphi\in[\varphi_1,\varphi_2]$

$\begin{cases} x=\rho(\varphi)\cos\varphi \\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$

Вст-ка из конца стр 17.6

$dl=\sqrt{x'(\varphi)^2+y'(\varphi)^2}\,d\varphi=\sqrt{\rho(\varphi)^2+\rho'(\varphi)^2}\,d\varphi$

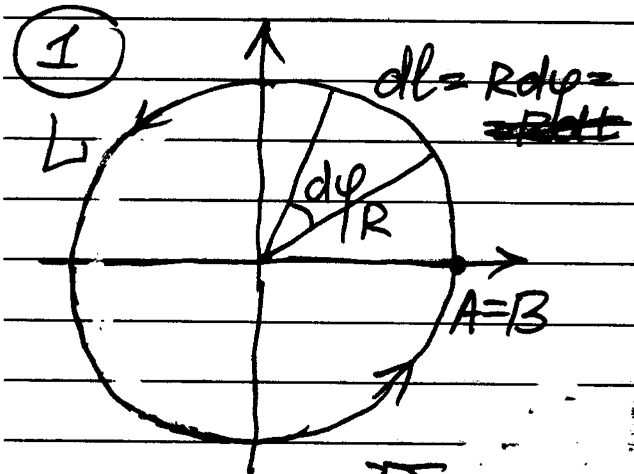
$\Rightarrow \int\limits_{AB} f(x,y)\,dl=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho(\varphi)\cos\varphi,\rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\underbrace{\rho^2+\rho'^2}_{\text{для краткости}}}\,d\varphi$

3) $\varphi=\varphi(\rho),\ \rho\in[\rho_1,\rho_2]\Rightarrow \begin{cases} x=\rho\cos\varphi(\rho) \\ y=\rho\sin\varphi(\rho) \end{cases}$ ~~⇒~~

на след. стр.

~~⇒~~ $dl=\sqrt{x'(\rho)^2+y'(\rho)^2}\,d\rho=\sqrt{1+\rho^2\varphi'(\rho)^2}\,d\rho\Rightarrow$

$\Rightarrow \oint\limits_{AB} f(x,y)\,dl =$ —и— сам-но

① 

$L:\ x^2+y^2=R^2$

$\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$ $\varphi\in[0,2\pi]$, $\rho(\varphi)\equiv R$, ~~уг. скор~~

$l = \oint\limits_L dl = \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\underbrace{\rho(\varphi)^2}_{R^2}+\underbrace{\rho'(\varphi)^2}_{0^2}}\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} R\,dt = 2\pi R$

(геом смысл $\int$ла I-го рода крив-го)

Зам Если $L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\chi(t)\end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$

$\Rightarrow \int\limits_L f(x,y,z)\,dl = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2+\dot\chi^2}\,dt$

§3 Криволин-ые $\int$лы II-го рода

Пусть L - простая спрямл-ая кривая:

$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t)\end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$ и пусть $\vec F(x,y) = P(x,y)\vec i + Q(x,y)\vec j$:

$D(\vec F) = D(P)\cap D(Q)\supset L = AB$

$\sqrt{x'(\varphi)^2+y'(\varphi)^2}\,d\varphi = \sqrt{(\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi)^2+(\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi)^2}\,d\varphi =$

$= \sqrt{\rho(\varphi)^2+\rho'(\varphi)^2}\,d\varphi$