Лекция 18

Итак, нам надо убедиться в том, что

$$\exists \lim_{\Delta \to 0} [\ell(T) - \underbrace{I(T)}_{\exists\text{-ет}}] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim \ell(T) = \lim I(T)$$

Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall T[\alpha, \beta] : \Delta(T) < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\ell(T) - I(T)| < \varepsilon$$, т.е., что

$\exists \delta(\varepsilon)$:

Надо док-ть!

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ и } \forall T[\alpha, \beta] : \Delta(T) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |\ell(T) - I(T)| < \varepsilon \quad (3)$$

Заметим, что

$$\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right| \leq |b - c| \quad (4)$$

Пусть $b > c > 0$

$$\sqrt{a^2+b^2} + c \leq \sqrt{a^2+c^2} + b \quad \}\ \hat{}\ 2$$

$$\cancel{2}\sqrt{a^2+b^2}\,c \leq \cancel{2}\sqrt{a^2+c^2}\,b \quad \}\ \hat{}\ 2 \qquad \text{—— " ——}$$

$$a^2c^2 + \cancel{b^2c^2} \leq a^2b^2 + \cancel{c^2b^2}$$

$$\underbrace{(b^2 - c^2)}_{\geq 0}\ \underbrace{a^2}_{\geq 0} \geq 0 \quad \leftarrow$$

} доп-но

Тогда

$$|\ell(T)-I(T)| \overset{(1)-(2)}{=} \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\overset{a}{\dot\varphi^2(\xi_i)}+\overset{b}{\dot\psi^2(\eta_i)}}-\sqrt{\overset{a}{\dot\varphi^2(\xi_i)}+\overset{c}{\dot\psi^2(\xi_i)}}\right)\right| \le$$

$\times\Delta t_i$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\left|\sqrt{}-\sqrt{}\right|\Delta t_i \overset{(4)}{\le}$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\left|\dot\psi(\eta_i)-\dot\psi(\xi_i)\right|\Delta t_i \qquad (5)$$

Ф-ия $\dot\psi \in \overset{\text{непр}}{C}[\alpha,\beta] \Rightarrow$ (по т. Кантора) $\dot\psi$ равном-но непр-на на $[\alpha,\beta]$:

$$\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists \delta_1>0 : \forall \xi,\eta\in[\alpha,\beta] : |\xi-\eta|<\delta_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\dot\psi(\xi)-\dot\psi(\eta)| < \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha} \qquad (6)$$

т.е. $\exists\, \delta_1(\varepsilon)$:

$\forall\varepsilon>0$ и $\forall \xi,\eta\in$ — " — $\qquad (6)$

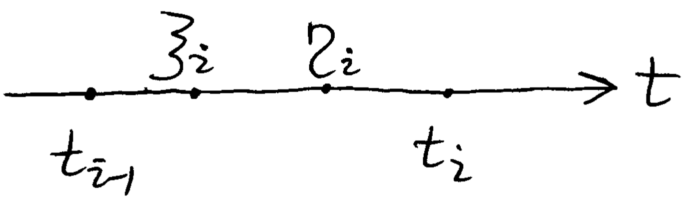
Положим $\delta(\varepsilon)\equiv\delta_1(\varepsilon)$. Тогда

$$\forall\varepsilon>0 \text{ и } \forall T[\alpha,\beta] : \Delta(T)<\delta(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\ell(T)-I(T)| \overset{(5)}{\le} \sum_{i=1}^{n}|\dot\psi(\eta_i)-\dot\psi(\xi_i)|\Delta t_i <$$

$$\overset{(6)}{<} \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\Delta t_i = \frac{\varepsilon}{\cancel{\beta-\alpha}}\cancel{\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i} = \varepsilon$$

$$\xi=\xi_i,\ \eta=\eta_i \Rightarrow |\xi-\eta| = |\xi_i-\eta_i| \le \Delta t_i \le \Delta < \delta = \delta_1$$



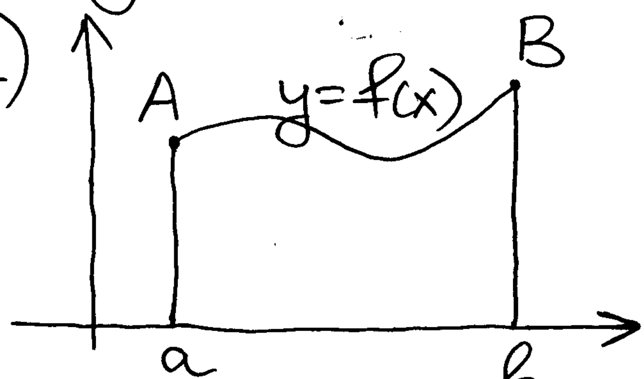
т.е. $|\ell(T) - I(T)| < \varepsilon \leftarrow (3)$

$\Rightarrow \ell(T) - I(T) \to 0,\ \Delta \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell(T) \xrightarrow[\uparrow \text{ 2тg}]{} I \equiv \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\psi^2}\,dt,\ \Delta \to 0$

Следствия

1)



$\begin{cases} x = t \equiv \varphi(t) \\ y = f(t) \equiv \psi(t) \end{cases} \quad t \in [a,b]$

$\dot\varphi(t) \equiv 1,\ \dot\psi(t) = \dot f(t) = f'(x)$

$\ell = \int\limits_a^b \sqrt{1^2 + \dot f^2}\,dt = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$ или сразу

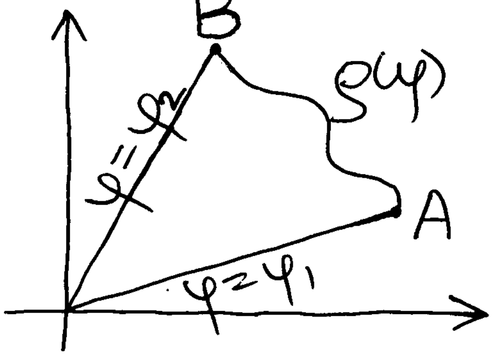
$\ell = \int\limits_{AB} d\ell = \int\limits_{AB} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

кривол-й инт 1-го рода (см §2)

Напр $y = x^2$, $x \in [0,1]$ $\Rightarrow \ell = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\,dx = $ — " — $=$

$= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2 + \sqrt{5})$

2) $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\varphi_1,\varphi_2]$



параметр

$$\begin{cases} x=\rho(\varphi)\cos\varphi \\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

получить сам-но

$$l=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{x'(\varphi)^2+y'(\varphi)^2}\,d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho(\varphi)^2+\rho'(\varphi)^2}\,d\varphi$$

3) $\varphi=\varphi(\rho)$, $\rho\in[\rho_1,\rho_2]$

пар-тр

$$x=\rho\cos\varphi(\rho)$$
$$y=\rho\sin\varphi(\rho)$$

Док-те, что $l=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\sqrt{1+\rho^2\varphi'(\rho)^2}\,d\rho$

Зам-ие. В случае простр-ой кривой

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ z=\chi(t), \end{cases} \quad t\in[\alpha,\beta] \Longrightarrow l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2+\dot\chi^2}\,dt$$

где $\varphi,\psi,\chi\in C^1[\alpha,\beta]$

§2 Кривол-ые $\int$лы 1-го рода

Пусть L – простая (как замкн-ая, так и незамкн-я) спрямляемая кривая:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

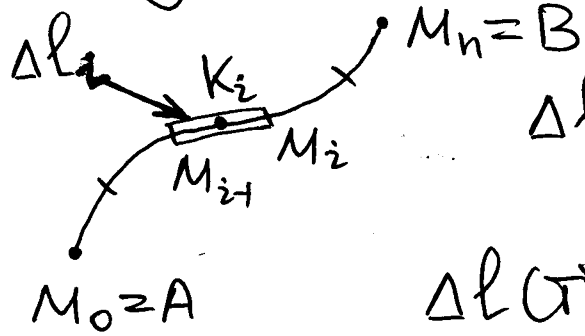
непр-ны

Пусть ф-я z: $\forall M \in L \to f(M) \in \mathbb{R}$,

т.е. $z = f(M) = f(x,y) : D_f \supset L$

Разбиение $T[\alpha,\beta]$ на оси $t \xrightarrow{\text{порождает}}$

$\to$ разбиение $T[L]$ ~~на~~ кривой L



$\Delta l_i \equiv \rho(\overset{\frown}{M_{i-1}, M_i}) \equiv$ длина i-ой частичной дуги

$\Delta l(T) = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i$ – диаметр $T[L]$

$K_i(\xi_i, \eta_i)$ – i-я пром-ая точка

$\{K_1, \dots, K_n\} \equiv \{K_i\}$

$I(T, K_i) \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta l_i$ – $\int$ая Σ-а для ф-ии f

Опр Если $\exists \lim\limits_{\Delta l \to 0} I(T, K_i)$, то он наз-ся криволин-ым $\int$ом 1-го рода от ф-ии f по кривой L

Обозн $\int\limits_L f(x,y)dl$ или $\int\limits_{AB} f(x,y)dl$

Зад-ие. Дать опр-ие (в "терашнах $\varepsilon-\delta$") $\lim\limits_{\Delta\to 0} I(T,K_i)$

Зам Т.к. Δl_i не зависят от напр-ия пути $\int$-ия (они $=\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}$ и $\Rightarrow$ всегда ≥ 0), то $\int\limits_{AB}=\int\limits_{BA}$

Опр Простая кривая $L\equiv\{M(\varphi(t),\psi(t))\,|\,t\in[\alpha,\beta]\}$ (*)
наз гладкой, если
1) $\varphi,\psi\in C^1[\alpha,\beta]$

Отсутствие особых точек ("точек остановки")

2) $\forall t\in[\alpha,\beta]\Rightarrow\dot\varphi^2(t)+\dot\psi^2(t)\neq 0$

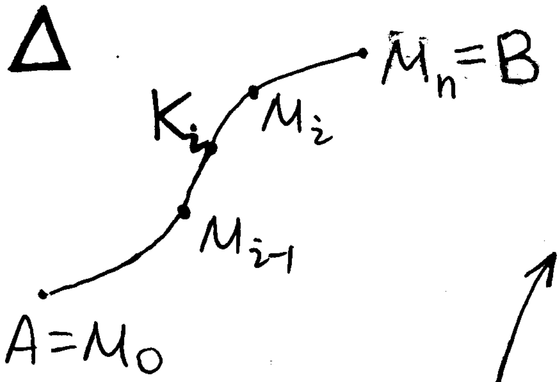
Зам Глад-ть кривой обеспечивает непр-ое изм-ие напр-ия касат-ой к этой кривой (геом смысл гладкости)

Теор2 (о сведении крив-го $\int$ла 1-го рода к опр-му $\int$лу) Пусть:
1) L - ~~гладкая~~ простая гладкая кривая, опред-ая (*)
2) $f(x,y)$ непр-на на кривой L

$$\Rightarrow \exists \int_L f(x,y)\,dl = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\underbrace{\sqrt{\dot\varphi(t)^2+\dot\psi(t)^2}\,dt}_{dl}$$

Дополн-но:

Г Δ



$$T[\alpha,\beta] \longleftrightarrow T[L]$$

$$\Delta t = \max_{1\le i\le n} \Delta t_i = \Delta t(T)$$

$$\Delta l = \max_{1\le i\le n} \Delta l_i = \Delta l(T)$$

диаметры $T[\alpha,\beta]$ и $T[L]$ соотв-но

Мы уже знаем, что

$$\Delta l_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2}\,dt = \sqrt{\dot\varphi^2(\xi_i)+\dot\psi^2(\xi_i)}\,\overbrace{(t_i - t_{i-1})}^{\Delta t_i}, \quad (1)$$

где $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i) \subset [t_{i-1}, t_i]$

Т.к. $\dot\varphi, \dot\psi \in C[\alpha,\beta] \Rightarrow \sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2} \in C[\alpha,\beta] \Rightarrow$

(по 1-ой т. В-са) $\exists\, m, M : \forall t \in [\alpha,\beta] \Rightarrow$

$\Rightarrow m \le \sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2} \le M$

Пусть m – точная нижняя грань $\Rightarrow$

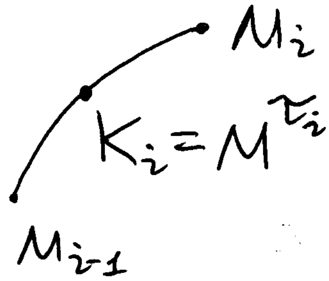
$\Rightarrow$ (по 2-й т. В-са) $\exists\, t^* \in [\alpha,\beta]$:

$$m = \underbrace{\sqrt{\dot\varphi^2(t^*)+\dot\psi^2(t^*)}}_{\text{см. усл 2) опр-ия гладкости кривой}} > 0$$

Т.о., из (1) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow m\Delta t_i \le \Delta l_i \le M\Delta t_i \Rightarrow \begin{cases}\Delta l_i \le M\Delta t_i\\ \Delta t_i \le \frac{1}{m}\Delta l_i\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\Delta l_i \to 0, \Delta t_i \to 0\\ \Delta t_i \to 0, \Delta l_i \to 0\end{cases}$$ – рассказать о физич-м смысле



$$K_i(\xi_i, \eta_i) \equiv M^{\tau_i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\xi_i = \varphi(\tau_i)\\ \eta_i = \psi(\tau_i)\end{cases}, \quad \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

Составим ∫ую Σ-у для ф-ии f

$$I(T, K_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta l_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overbrace{f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i))}^{const} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\dot\varphi^2(t) + \dot\psi^2(t)}\, dt$$

Надо док-ть, что

$$\lim_{\Delta l \to 0} I(T, K_i) = I \equiv \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\dot\varphi^2(t) + \dot\psi^2(t)}\, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\dot\varphi^2(t) + \dot\psi^2(t)}\, dt$$

адд-ое св-во опр-го ∫ла

Рассм-м разность

18.9

$$I(T,K_i) - I = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)) -$$

$$- f(\varphi(t),\psi(t))] \times \sqrt{\dot\varphi^2(t)+\dot\psi^2(t)}\,dt \qquad (2)$$

Т.о., нужно док-ть, что

$\underbrace{I(T,K_i)-I}_{=(2)} \to 0$, $\Delta l \to 0$, т.е., что $\Updownarrow$ $\Delta t \to 0$

$\exists\, \delta(\varepsilon)$:

$\forall \varepsilon>0, \forall T[\alpha,\beta]: \Delta t(T) < \delta(\varepsilon)$ и $\forall \{K_i\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |I(T,K_i) - I| < \varepsilon \qquad (3)$

~~$f(\varphi$~~ Зам, что $f(\varphi(t),\psi(t))$ непр (как сложная ф-ия) на $[\alpha,\beta] \Rightarrow$ (по т. Кантора) равн-но непр-на на $[\alpha,\beta]$. Это значит, что

$\exists\, \delta_1(\varepsilon) > 0$:

$\forall \varepsilon > 0$ и $\forall \tau, t \in [\alpha,\beta]: |\tau - t| < \delta_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(\varphi(\tau),\psi(\tau)) - f(\varphi(t),\psi(t))| < \varepsilon/l, \qquad (4)$

где $l \equiv \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot\varphi^2(t)+\dot\psi^2(t)}\,dt$ – длина кривой L

Положим $\delta(\varepsilon) \equiv \delta_1(\varepsilon)$. Тогда

18.10

$\forall \varepsilon > 0,\ \forall T[\alpha,\beta] : \Delta t(T) < \delta$ и $\forall \{K_i\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |I(T,K_i) - I| \overset{(2)}{\leqslant} \sum_{i=1}^{n} |f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)) - f(\varphi(t),\psi(t))| \times$

$\times \sqrt{\quad}\, dt \overset{(4)}{<} \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\varepsilon}{\ell} \sqrt{\quad}\, dt = \frac{\varepsilon}{\cancel{\ell}} \cancel{\sum_{i=1}^{n} \Delta l_i} = \varepsilon,$

$\tau = \tau_i \Rightarrow |\tau - t| < \Delta t_i \leqslant \Delta t_i \leqslant \Delta t(T) < \delta = \delta_1$

т.е. $|I(T,K_i) - I| < \varepsilon \leftarrow (3)$

$\Rightarrow I(T,K_i) - I \to 0,\ \Delta t \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow I(T,K_i) \to I = \int_{\alpha}^{\beta} \boxed{\quad} dt,\ \Delta l \to 0$ чтд $\varnothing$

Сл-ия

1) ~~y=y~~ если ф-ия задана явно:

$y = y(x),\ x \in [a,b]$, то

$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

$\Rightarrow \int_L f(x,y)\, dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$

2) $\rho = \rho(\varphi),\ \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$

$\int_L f(x,y)\, dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi) \underbrace{\sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'(\varphi)^2}\, d\varphi}_{dl},$

3) $\varphi = \varphi(\rho),\ \rho \in [\rho_1, \rho_2]$ $\int_L f(x,y)\, dl =$ сам-но