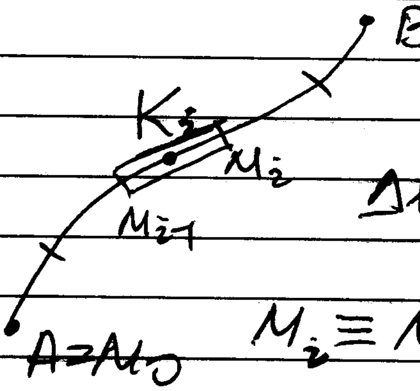
§3 Кривол-ые инт II-го рода

Пусть L — простая спрямл-ая кривая:

$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$ и пусть $\vec F(x,y)=P(x,y)\vec i+Q(x,y)\vec j$:

$$D_{\vec F}=D_P\cap D_Q\supset L=\widetilde{AB}$$



$$T[\alpha,\beta]\Leftrightarrow \tilde T[L]$$

$$\Delta l_i\equiv \rho(\widetilde{M_{i-1},M_i}),\quad \tilde\Delta(\tilde T)\equiv \operatorname{diam}\tilde T$$

$$M_i\equiv M^{t_i}=M(\underbrace{\varphi(t_i)}_{x_i},\underbrace{\psi(t_i)}_{y_i})=M(x_i,y_i)$$

$\Delta x_i\equiv x_i-x_{i-1}$, $\Delta y_i\equiv y_i-y_{i-1}$

Пусть $K_i\in \widetilde{M_{i-1}M_i}$ — i-я пром-я т-ка

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} I_1(\tilde T,K_i)&\equiv\sum_{i=1}^{n} P(K_i)\Delta x_i \\ I_2(\tilde T,K_i)&\equiv\sum_{i=1}^{n} Q(K_i)\Delta y_i \end{aligned}\right\} \text{инт } \Sigma\text{-ы ф-й } P \text{ и } Q$$

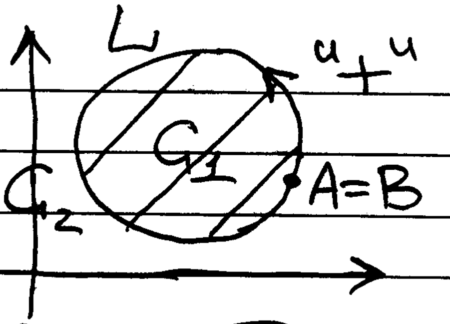
Опр
$$\left.\begin{aligned} \lim_{\tilde\Delta\to0} I_1(\tilde T,K_i)&\equiv\int_{AB} P(x,y)\,dx \\ \lim_{\tilde\Delta\to0} I_2(\tilde T,K_i)&\equiv\int_{AB} Q(x,y)\,dy \end{aligned}\right\} \text{крив-ые инт II-го рода}$$

Зам 1) Для $L=\widetilde{BA}\Rightarrow \Delta x_i,\Delta y_i$ меняют знак

$$\Rightarrow \int_{BA} P\,dx=-\int_{AB} P\,dx,\quad \int_{BA} Q\,dy=-\int_{AB} Q\,dy$$

В то же время Δl_i — сохр знак $\Rightarrow \int_{AB} f\,dl=\int_{BA} f\,dl$

2)



Если L - замкн кр-я, то запись $\int\limits_{AB}$ не опр-ет напр обхода, поэтому вводят обозн-я:

$\oint\limits_L P dx$ и $\oint\limits_L Q dy$ — $\int$лы в пол-м напр: G_1 остаётся слева

Опр $\int\limits_{AB} Pdx + \int\limits_{AB} Qdy \equiv \int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ — общий криволин-й $\int$ал II-го рода от в-р ф-ии $\vec{F}(x,y) = \{P(x,y), Q(x,y)\}$

Зам $\int Pdx = \int Pdx + 0 \cdot dy$

$\int Qdy = \int 0 \cdot dx + Qdy$

Теор 3 (о сведении $\int dx + dy$ к $\int dt$) Пусть:

1) AB — простая гл-ая кр-я ~~(*)~~

2) P и Q непр на AB

$\Rightarrow \exists \int\limits_{AB} P(x,y)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))\, \dot{\varphi}(t)\, dt$

и $\exists \int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy =$ Q $\dot{\psi}(t)$

Δ Без док-ва

18.3

Сл-ие $y=y(x),\ x\in[a,b]$

$$\Rightarrow \int\limits_{AB} P(x,y)\,dx = \int\limits_a^b P(x,y(x))\,dx$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b Q(x,y(x))\,y'(x)\,dx$$

Теор 4 (о связи кр-х ∫ов I и II родов)

Пусть вып-ны усл-я теор 3

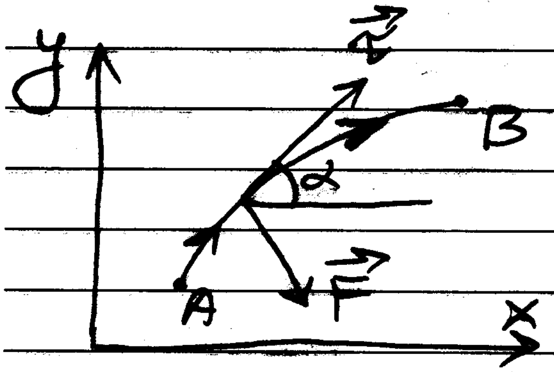
$$\Rightarrow \int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{AB} (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,dl,$$

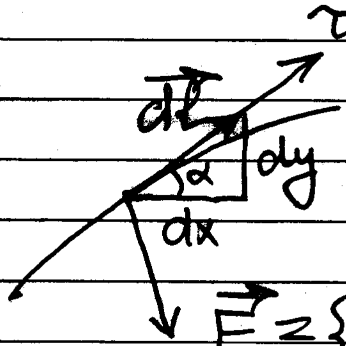
где $\alpha=\alpha(x,y)=\angle(\vec{\tau},\vec{Ox})$, $\vec{\tau}$ – напр-ый касат-й вектор кр-й AB

Геом ил-ие:

$|\vec{\tau}|=1$

$\vec{\tau}=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$





$d\vec{l}=\{dx,dy\}$

$\vec{F}=\{P,Q\}$

$$\left.\begin{array}{l} dx=\cos\alpha\,dl \\ dy=\sin\alpha\,dl \end{array}\right\} \Rightarrow \int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy = \int\limits_{AB}(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\,dl$$

Δ Пусть $\left\{\begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t)\end{array}\right.$ > закон дв-ия МТ

Тогда $\{\dot\varphi, \dot\psi\} \underset{\text{по опр } \vec v}{=} \vec v = v \cdot \vec\tau \underset{\text{т.к. } \vec v \uparrow\uparrow \vec\tau \text{ и } |\vec\tau| = 1}{=} \{v\cos\alpha, v\sin\alpha\}$ 18.4

$v = \sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\psi^2} \neq 0$ (~~т.к. кривая $\overline{AB}$ гл-ая~~) (т.к. $\overline{AB}$ — гл-ая)

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\dot\varphi}{v} = \dfrac{\dot\varphi}{\sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\psi^2}}, \quad \sin\alpha = \dfrac{\dot\psi}{\sqrt{\ \ }} \qquad (1)$

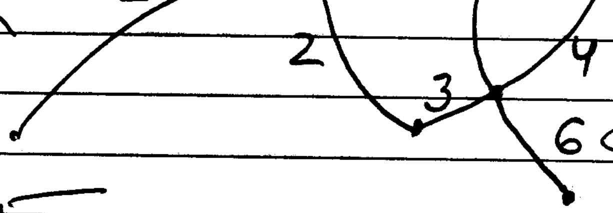
Т.о. $\displaystyle\int_{AB} P(x,y)\cos\alpha\, dl \overset{\text{теор 2}}{=}$ - - -

$\displaystyle = \int_\alpha^\beta P(\varphi(t), \psi(t)) \cos\alpha \sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\psi^2}\, dt \overset{(1)}{=}$

$\displaystyle = \int_\alpha^\beta P(\varphi(t), \psi(t))\, \dot\varphi(t)\, dt \overset{\text{теор 3}}{=} \int_{AB} P(x,y)\, dx$

Ан-но $\displaystyle\int_{AB} Q \sin\alpha\, dl = \int_{AB} Q\, dy$ $\not\Delta$

Опр Кусочно-гладкая кривая — кривая, сос~~тоящая~~ ~~ящая~~ из кон~~ечного~~ го числа простых гл-их ~~гладких~~ кр-х, не им-их общих внутр т-к

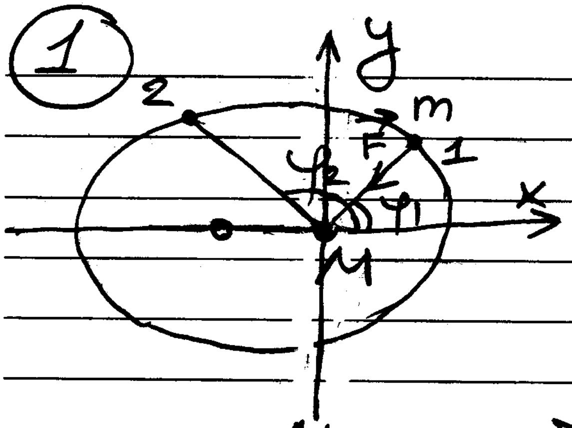


Зам Теор 2, 3 и 4 ср-вы ~~спр-вы~~ и для кусочно-гл-их кр-х и кусочно-непр ф-ий

Физ смысл: $A = \displaystyle\int_{L} (\vec F, d\vec l) = \int_L P\,dx + Q\,dy$, $\vec F = \{P, Q\}$, $d\vec l = \{dx, dy\}$
(работа)

или 3-га ①, или эта ф-ла

(1) 18.5



$$\rho = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} < 1$$

$$F = G\frac{Mm}{r^2}, \quad \vec F = -\overset{\gamma}{GM}\frac{m}{r^3}\vec r \equiv -\gamma m \frac{\vec r}{r^3}$$

$$\vec r = \{x, y\} \Rightarrow \vec F = \Big\{\underbrace{-\frac{\gamma m x}{\sqrt{x^2+y^2}^3}}_{P}, \underbrace{-\frac{\gamma m y}{\sqrt{\quad}^3}}_{Q}\Big\}$$

$$A = \oint_L (\vec F, \overset{\{dx,dy\}}{\overset{\parallel}{d\vec l}}) = \oint_L P\,dx + Q\,dy$$

$$x = \rho\cos\varphi = \frac{p\cos\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}, \quad y = \frac{p\sin\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

$$\Rightarrow A = -\gamma m \oint_L \frac{x\,dx}{\sqrt{\quad}^3} + \frac{y\,dy}{\sqrt{\quad}^3} =$$

$$= -\gamma m \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{x(\varphi)dx(\varphi) + y(\varphi)dy(\varphi)}{\sqrt{x(\varphi)^2 + y(\varphi)^2}^3} = -\frac{\gamma m}{2}\int_{r(\varphi_1)}^{r(\varphi_2)} \frac{dr^2}{r^3} =$$

$$= \frac{\gamma m}{r}\Big|_{r_1}^{r_2} = m\Big[\underbrace{\left(-\frac{\gamma}{r_1}\right)}_{U_1} - \underbrace{\left(-\frac{\gamma}{r_2}\right)}_{U_2}\Big] = m(U_1 - U_2)$$

$$r_1 \equiv \rho_1 = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi_1}, \quad r_2 = -\text{''}- \quad \Big| \quad U = -\frac{\gamma}{r}$$

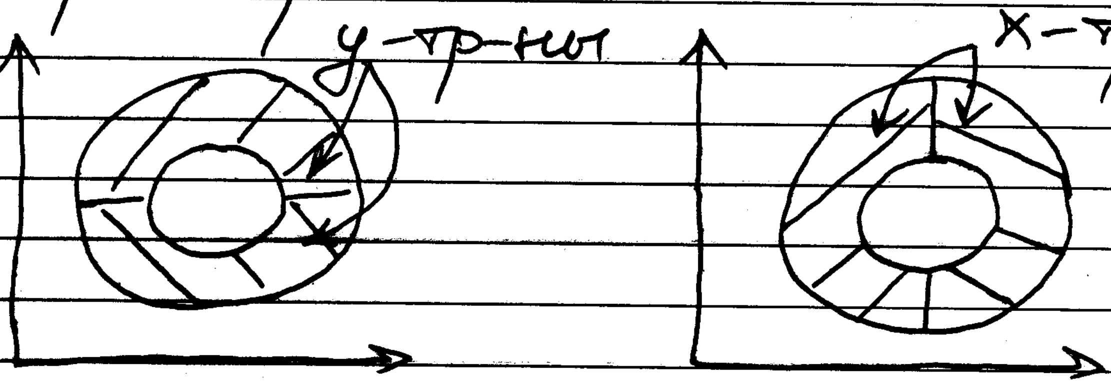
$\frac{\vec F}{m} = -\text{grad}\,U$ ← потенциал, $mU = W_П$

$\parallel \vec E$ напряж-ть (научимся искать позже)

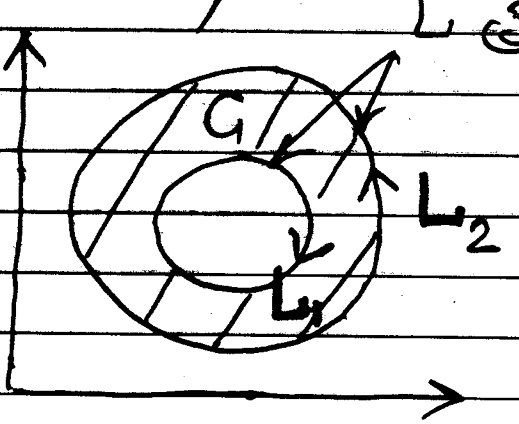
§4 Формула Грина

Опр Мн-во G (фигура) наз простым, если его можно разбить как на кон-ое число x-тр-ых (фигур) так и на кон-ое число y-тр-ых мн-в (без общих внутр т-к), гран-ми кот-х явл-ся кусочно-гл-ие кривые

Пример Кольцо G



$\Rightarrow$ G - простая ~~мн-во~~ фигура



Пусть G: гр-ца $L = L_1 + L_2$

Пол-ое напр обхода L: G остаётся слева

$$\Rightarrow \oint_{L} \equiv \oint_{L_1^-} + \oint_{L_2^+} = -\oint_{L_1} + \oint_{L_2}$$

Теор 5 (о ф-ле Грина) Пусть ф-ии $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ **непр** на простом мн-ве G