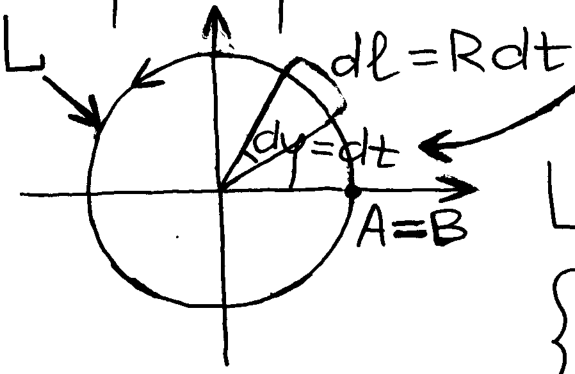
Лекция 19

Пример



точка движется с единичной угловой скоростью

$L: x^2+y^2=R^2$ или:

$$\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$$

$$\Rightarrow l=\int_L dl=\int_0^{2\pi}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt=$$

геом смысл крив-го ∫ла 1-го рода (вытекает из теорем 1 и 2)

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}R\,dt=2\pi R$$

Раз-ся, можно было сразу писать эту формулу (с другой стороны, можно от $\int dl$ сразу из геом ~~соотв~~ смысла dl переходить к $\int_0^{2\pi}R\,dt$)

Зам 1 Кр-ые ∫лы 1-го рода обладают всеми св-ми опр-ых ∫ов (лин-ть, аддит-ть, монот-ть, оценка по модулю, ф-ла среднего значения и т.д.)

Зам 2
$$L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\chi(t) \end{cases},\ t\in[\alpha,\beta] \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_L f(x,y,z)\,dl = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)) \times \sqrt{\dot\varphi^2(t)+\dot\psi^2(t)+\dot\chi^2(t)}\,dt$$

§3 Криволинейные $\int$-лы 2-го рода

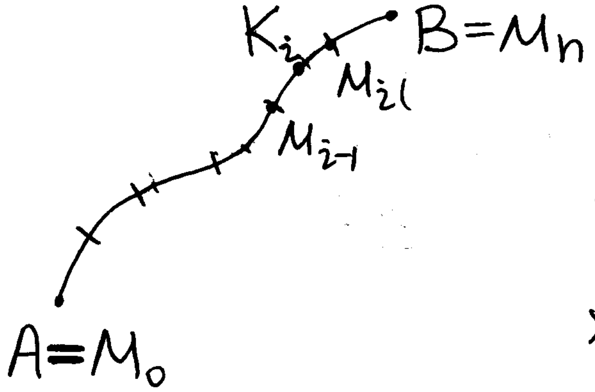
Пусть L – простая спрямляемая кривая:

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases},\ t\in[\alpha,\beta] \qquad (*)$$

и пусть $P(x,y),\ Q(x,y)$: $\underbrace{D(P)=D(Q)}_{\text{обл-ти опр-я}}=L$

Разбиение $T[\alpha,\beta]$ на оси t $\to$

$\to$ разб-ие $T[L]$ кривой L



$M_i(x_i,y_i)\equiv M^{t_i} =$

$= M(\varphi(t_i),\psi(t_i))$, т.е.

$x_i=\varphi(t_i),\ y_i=\psi(t_i)$

Положим

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \Delta y_i = y_i - y_{i-1},$

$\Delta l_i = \rho(M_{i-1},M_i)$, $\Delta l(T)=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta l_i$ – диаметр $T[L]$

$K_i(\xi_i,\eta_i)$ – i-ая пром-ая точка

$I_1(T,K_i)\equiv\sum\limits_{i=1}^n P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i,\ I_2\equiv\sum\limits_{i=1}^n Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$ –

– $\int$ые Σ-ы для ф-ий P и Q

Опр $\lim\limits_{\Delta l \to 0} I_1(T, K_i) \equiv I_1$ и $\lim\limits_{\Delta l \to 0} I_2(T, K_i) \equiv I_2$ (если они $\exists$-ют) наз-ся крив-ми $\int$ами 2-го рода от ф-ий P и Q соотв-но

Обозн $I_1 = \int\limits_{AB} P(x,y)dx$, $I_2 = \int\limits_{AB} Q(x,y)dy$

Зам 1 Т.о., крив-ые $\int$лы 2-го рода могут быть двух видов: $\int$лы по dx и по dy

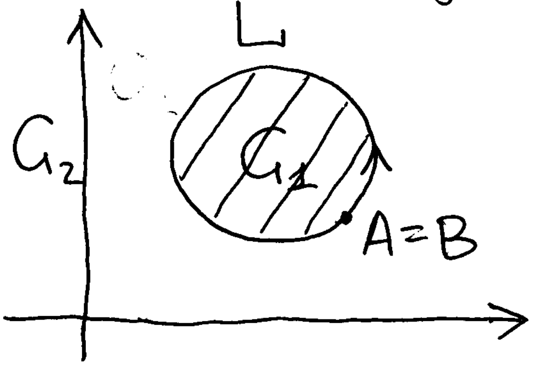
Зам 2 Из опр-я $\Rightarrow$ крив-ый $\int$л зависит от напр-ия $\int$ия, т.е. от того, какая из т. A и B считается начальной, а какая – конечной: если $\int$ие ведётся от B к A, то все Δx_i и Δy_i в $\int$ых Σ-ах меняют знак $\Rightarrow$ сами эти суммы и их пределы (= ые $\int$ам) также меняют знак, т.е.

$$\int\limits_{AB} Pdx = -\int\limits_{BA} Pdx, \quad \int\limits_{AB} Qdy = -\int\limits_{BA} Q\,dy$$

– в отличие от $\int$ов 1-го рода

Опр $I \equiv I_1 + I_2 \equiv \int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ наз-ся общим крив-м $\int$ом 2-го рода (от вектор ф-ии $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\cdot\vec{i} + Q(x,y)\cdot\vec{j}$)

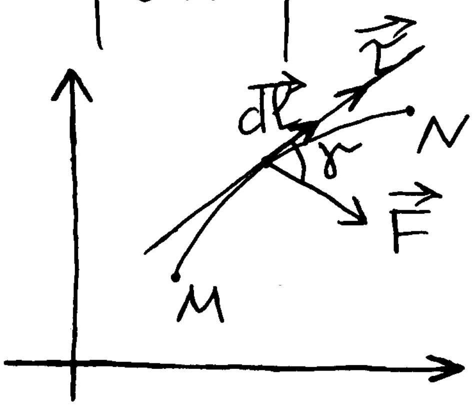
Зам Если L — простая замкнутая кривая, опр-ая (*), то обозн-ие $\int_{AB}$ не отражает напр-ие обхода. В таком случае удобно договориться о т.н. положит-ом направ-ии обхода кривой



Пол-ое напр-ие обхода кривой — то, при котором область G_1 остаётся слева

$\cancel{\int_{AB}} \longrightarrow \oint_L P\,dx + Q\,dy$ — ∫ал по замкнутому контуру L в пол-ом напр-ии

Пример



$|\vec{\tau}| = 1$

Дано силовое поле

$$\vec{F} = \{P(x,y), Q(x,y)\}$$

$dA = (\vec{F}, d\vec{l})$ — элементарная работа

(в ТД — δA)

$$\left.\begin{matrix}\text{Напр-ый} \\ \text{дифф-л кривой}\end{matrix}\right\} d\vec{l} = \{dx, dy\} = \vec{\tau}\,dl, \quad \vec{\tau} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$$

$$\cancel{A = \int_{MN} dA = \int_{MN} (\vec{F}, d\vec{l}) = \int_{MN} P\,dx + Q\,dy}$$

$$A = \oint_{MN} dA = \oint_{MN} (\vec{F} d\vec{l}) = \oint_{MN} P dx + Q dy$$

$$\oint_{MN} (\vec{F}, \vec{\tau}) dl = \oint_{MN} (P\cos\alpha + Q\sin\alpha) dl$$

здесь знак учит-ся напр-ем $\vec{\tau}$ | связь между криволин-ми $\int$ими 1-го и 2-го рода (формальный вывод, строгий — ниже)

Теор 3 (о сведении крив-го $\int$ла 2-го рода к опр-му $\int$лу) Пусть:

1) L — простая гладкая кривая, опр-ая (*)

2) $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непр-ны на кривой L

$$\Rightarrow \exists \int_{AB} P(x,y)dx = \int_\alpha^\beta P(\varphi(t), \psi(t))\dot{\varphi}(t)dt$$

$$\text{и } \exists \int_{AB} Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \text{— и —}\ \dot{\psi}(t)dt$$

Δ Без Δ-ва (см. Ильин, Позняк)

Зам 1 В случае замкнутой кривой

$\int_{AB} \longrightarrow \pm\oint$ в зависимости от напр-ия обхода контура (в пол-ом или отр-м напр-ии при возр-ии t от α до β)

Зам. 2 В случае $L: \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\chi(t) \end{cases}, \ t\in[\alpha,\beta]$

$$I=\oint\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx+Q(\ )\,dy+R(\ )\,dz=$$

$$=\oint\limits_{\alpha}^{\beta}\left[P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\,\dot\varphi(t)+Q(\ )\,\dot\psi(t)+\right.$$
$$\left.+R(\ )\,\dot\chi(t)\right]dt$$

Сл-ие В случае $y=y(x),\ x\in[a,b]$

$x=t\equiv\varphi(t)\Rightarrow\dot\varphi(t)\equiv1$

$y=y(x)=y(t)\equiv\psi(t)$

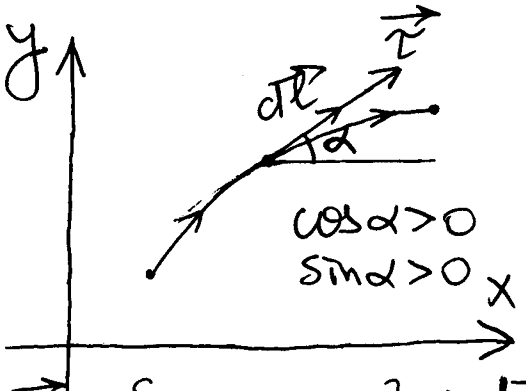
$$\oint\limits_{AB}P(x,y)\,dx=\oint\limits_{a}^{b}P(t,y(t))\cdot1\,dt=\oint\limits_{a}^{b}P(x,y(x))\,dx$$

$$\oint\limits_{AB}Q(x,y)\,dy=\oint\limits_{a}^{b}Q(x,y(x))\,y'(x)\,dx$$

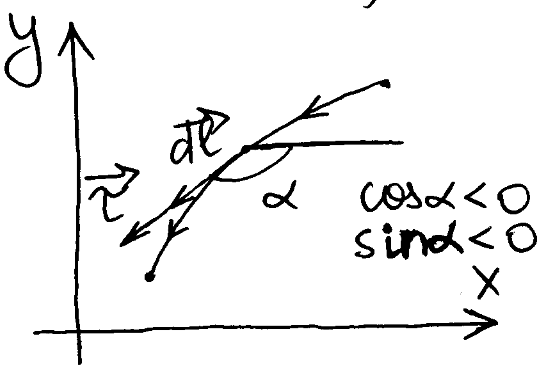
Теор 4 Пусть выполнены усл-я теор 3. Тогда

$$\oint\limits_{AB}P\,dx+Q\,dy=\oint\limits_{AB}(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\,dl,$$

где $\alpha\equiv\angle(\vec\tau,\vec{OX})$



$\vec\tau=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}\Rightarrow|\vec\tau|=1$



19.7

Зам Кривол-ые $\int$лы от Pdx или Qdy всегда можно рассм-ть как частные случаи общего $\int$ла соотв-но при Q или $P=0$.

Напр, $\int Pdx = \int Pdx + 0\cdot dy$

В связи с этим мы далее по умолчанию под кривол-ми $\int$ми 2-го рода всегда будем подразум-ть общие кривол-ые $\int$лы 2-го рода, в кот-х, быть может, одна из ф-ий: P или Q ~~ра~~ $\equiv 0$

Δ Будем интерпретировать ур-ия

$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t)\end{cases}$ как закон движения МТ

$$\Rightarrow \vec{v} \underset{\uparrow}{=} v\cdot\vec{\tau} = \{v\cos\alpha, v\sin\alpha\} \overset{\text{по опр-ию скорости}}{=} \{\dot\varphi, \dot\psi\}$$

исп-ем как изв-ый факт (скорость напр-на по касат-ой к траектории движения)

$v=\sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2} \neq 0$ (т. к. кривая гладкая)

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\dot\varphi}{v} = \frac{\dot\varphi}{\sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2}},\ \sin\alpha = \frac{\dot\psi}{\sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2}}$$

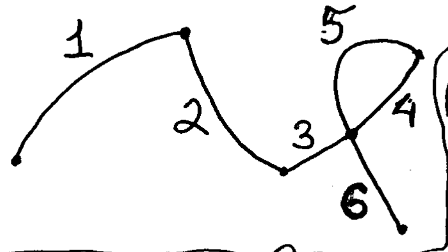
$$\int\limits_{AB} P(x,y)\cos[\alpha(x,y)]\,dl \overset{\text{теор 2}}{=}$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta P(\varphi(t),\psi(t))\underbrace{\cos[\alpha(\varphi(t),\psi(t))]\cdot\overbrace{\sqrt{\dot\varphi^2(t)+\dot\psi^2(t)}\,dt}^{dl}}_{\dot\varphi(t)} =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t),\psi(t))\overbrace{\dot\varphi(t)dt}^{dx} \underset{\uparrow \text{ теор 3}}{=} \int_{AB} P(x,y)dx$$

Ан-но $\int_{AB} Q\sin\alpha\, dl = \int_{AB} Q\,dy$ $\triangle$

Зам



~~(Простая)~~ кусочно-гладкая кривая $\equiv$ кривая, состоящая из конечного числа простых гладких кривых, не имеющих общих внутренних точек

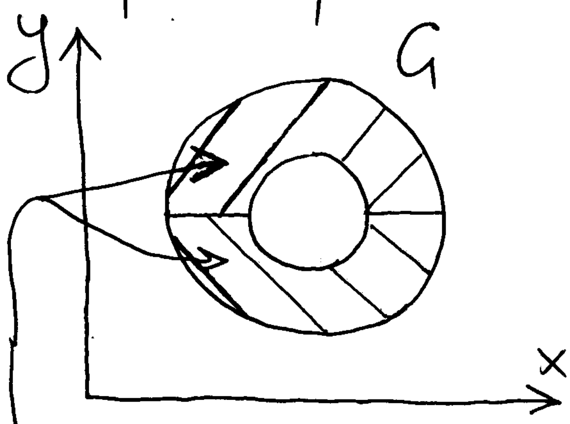
Утв Если L – кусочно-гл-ая кривая, а ф-я $f(x,y)$ – кусочно непр-на на кривой L (при этом участки непр-ти могут не совпадать с участками гладкости), то теоремы 2, 3 и 4 остаются в силе

§4 Формула Грина

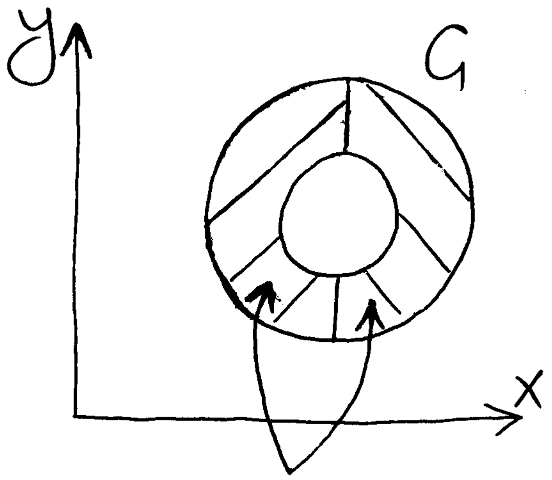
Опр Мн-во G наз-ся простым, если его можно разбить как на конечное число x-трапециевидных, так и на конечное число y-трапец-ных мн-тв (без общих внутр-х точек), границами которых явл-ся простые кусочно-гладкие кривые

Зам Несложно убедиться в том, что граница простого мн-ва G — также простая кусочно-гладкая кривая

Примеры



у-трапец-ые мн-ва

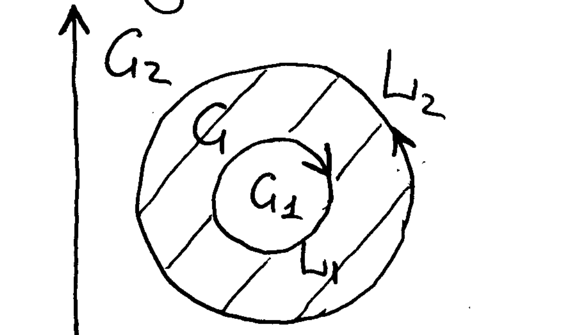


на этих рисунках — одно и то же мн-во G

x-трап-ые мн-ва

$\Rightarrow G$ — простое мн-во

Введём понятие пол-го напр-я обхода многосвязного мн-ва G



Пусть мн-во G: его граница $\Gamma = L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$ (т.е. $\Gamma = L_1 + L_2$)

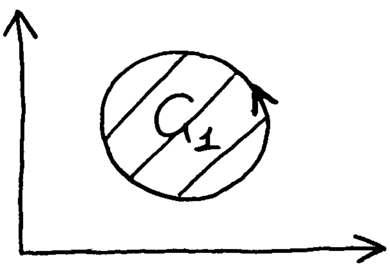
$\Rightarrow G$ — двусвязное мн-во (т.к. его гр-ца — две ~~за~~ простые замкнутые кривые)

Положит-ое напр-ие обхода границы Γ — то, при котором область G остаётся слева

Отметим, что пол-ое напр-ие обхода границы может отличаться от пол-го на-пр-ия обхода кривых, составл-их эту границу. Напр, на рис. указано пол-ое нап-р-ие обхода Γ, которое отв-ет отр-му нап-р-ию обхода внутр-й гран-ой кривой L_1:

Γ – в пол-ом напр
L_1 – в отр-ом
L_2 – в пол-ом

$$\oint\limits_{L} \equiv \oint\limits_{L_1^-} + \oint\limits_{L_2^+} \equiv -\oint\limits_{L_1} + \oint\limits_{L_2}$$



Если L_1 воспринимать как границу G_1, то пол-ое нап-р-ие обхода кривой L_1 сов-падает с пол-ым напр-ем обхода (гр-цы) этой обл-ти

Т.о., мы различаем понятия пол-го напр-я обхода кривой и пол-го напр-я обхода границы

Теор 5 (о формуле Грина) Пусть ф-ии $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и частные произв-ые $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ непр-ны на простом мн-ве G

$$\Rightarrow \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_{L} Pdx + Qdy$$ – ф-ла Грина

где L – граница мн-ва G