19.1

$$\Rightarrow \boxed{\oint_{L} P\,dx + Q\,dy = \iint_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy}$$

где L – гр-ца мн-ва G (берётся в пол-м напр обх L) ф-ла Грина

Зам $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix}$

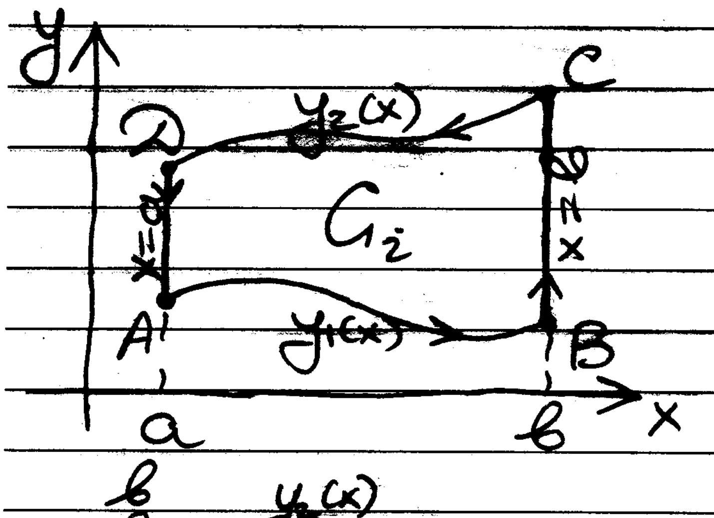
Δ Док-во

ΔI) Сперва Δ-м, что

$$\iint_{G} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint_{L} P\,dx \quad (Q \equiv 0) \quad (I)$$

Т.к. G – простое мн-во, то

$G = G_1 \cup \ldots \cup G_n$, G_i – y-пр-ны



Гр-ца G_i – кривол-я трап-я $ABCD \equiv \Gamma_i$

$$\iint_{G_i} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy = \int_a^b dx \cdot P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} =$$

$$= \int_a^b P(x, y_2(x))\,dx - \int_a^b P(x, y_1(x))\,dx \overset{\text{[illegible] 19.2}}{=}$$

$$= \int_{DC} P(x,y)\,dx - \int_{AB} P(x,y)\,dx = -\int_{CD} P\,dx - \int_{AB} P\,dx \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{На } DA \;\; x(y) \equiv a \\ \text{На } BC \;\; x(y) \equiv b \end{array}\right\} \Rightarrow dx = 0 \Rightarrow$$

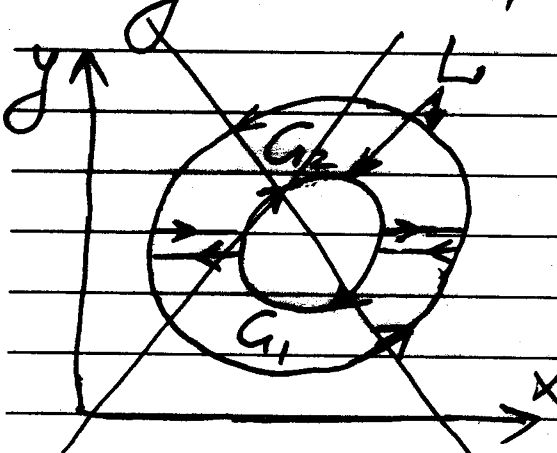
$$\Rightarrow \int_{BC} P(x,y)\,dx = \int_{DA} P(x,y)\,dx = 0 \quad (2)$$

Из (1) и (2) пол-ем, что

$$\iint_{G_2} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{CD} P\,dx - \int_{AB} P\,dx - \overbrace{\int_{BC} P\,dx}^{=0} - \overbrace{\int_{DA} P\,dx}^{=0} =$$

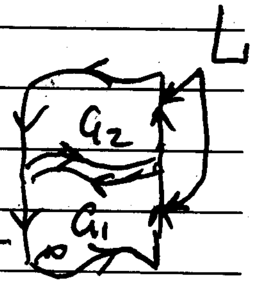
$$= -\oint_{\Gamma_2} P\,dx \quad (\text{т.к. } AB + BC + CD + DA = \Gamma_2)$$

Пусть $G = G_1 \cup G_2$, G_i – у-тр-ны



Γ_i – гр G_i, L – гр G

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} = \oint_L$$



← упростить! ←

Ан-но для $G = G_1 \cup \ldots \cup G_n \Rightarrow \oint_{\Gamma_1} + \cdots + \oint_{\Gamma_n} = \oint_L$

Тогда

$$\cancel{\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \iint_{G_1} \ldots + \iint_{G_n} = \oint}$$

19.3

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = \iint\limits_{G_1} + \dots + \iint\limits_{G_n} =$$

$$= -\oint\limits_{\Gamma_1} Pdx - \dots - \oint\limits_{\Gamma_n} Pdx = -\oint\limits_L Pdx \qquad \cancel{\Delta}\,\mathrm{I})$$

ΔII) Ан-но $\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy = +\oint\limits_L Q\,dy$ (II)

– Δ-ть сам-но $\cancel{\Delta}$ II)

$$(\mathrm{II}) - (\mathrm{I}): \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy \quad \cancel{\Delta}$$

Зам Ф-ла Грина спр-ва $\forall$ замкн обл-ти, гр-ца кот-й состоит из кон-го числа кусочно-гл-их кривых)

Сл-ие $P = -y,\ Q = +x$

$$\Rightarrow \oint\limits_L Pdx + Qdy = \oint\limits_L -ydx + xdy =$$

$$= \iint\limits_G \left[\frac{\partial(+x)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right] dxdy = \iint\limits_G 2dxdy = 2S(G)$$

$$\Rightarrow S(G) = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx$$

Задче Δ-ть, что $S_{элл} = \pi ab$ $\left(\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\cos t \end{array}\right.$ $t \in [0, 2\pi]$

§5 Св-ва криволин-х $\int$ов II-го рода

Теор 6.1 Пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непр в обл G. Тогда сл-ие условия эквив-ны:

1) $\forall$ простой замкнутой кусочно-гл-ой кривой ($\equiv$ замкн контур) $L \subset G$

$$\Rightarrow \oint_L P\,dx + Q\,dy = 0$$

2) $\forall$ фикс-х т-к A и $B \in G \Rightarrow \int_{AB} P\,dx + Q\,dy$ не зависит от пути $\int$ия, т.е. от выбора $\forall$ простой кусочно-гл-ой кр-й ($\equiv$ контура) $\overset{\frown}{AB} \subset G$, соед-ей эти т-ки

3) Выр-ие $P\,dx + Q\,dy$ — полный дифф-л, т.е. $\exists$ ф-я $u = u(M) \equiv u(x,y)$:

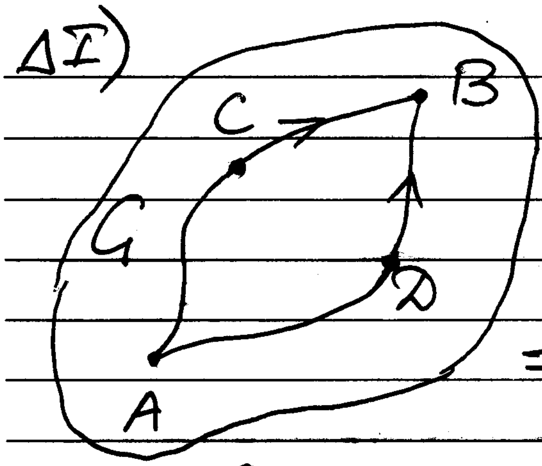
$$du = \underset{u_x}{\underset{\shortparallel}{P}}\,dx + \underset{u_y}{\underset{\shortparallel}{Q}}\,dy \Leftrightarrow \operatorname{grad} u = \{P, Q\} \equiv \underset{\text{напр-ть}}{\vec{F}}$$

(О физ смысле: сила — консерв-на, поле — потенц-но)

Δ

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dr, "\mathrm{I}"] & \\
3 \arrow[ur, "\mathrm{III}"] & & 2 \arrow[ll, "\mathrm{II}"]
\end{tikzcd}$$

ΔI)

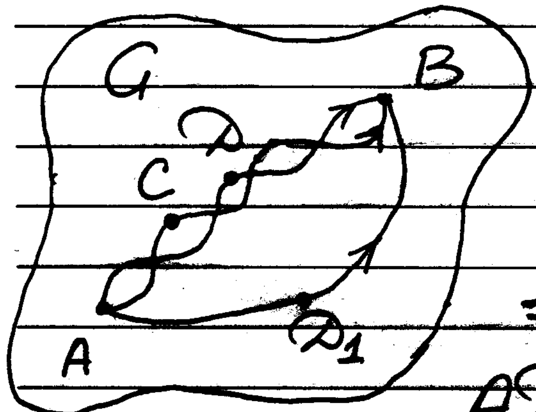


Пусть сперва контуры ACB и ADB не имеют общих внутр т-к $\Rightarrow$

$\Rightarrow ACBDA$ - замкн контур $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\oint_{ACBDA} Pdx+Qdy}_{=0 \text{ по усл } 1)} = \int_{ACB} + \int_{BDA} = \int_{ACB} - \int_{ADB} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{ACB} = \int_{ADB} \quad \text{ч.т.д.}$$



Пусть теперь ACB и ADB имеют $\forall$ число пересеч-й $\Rightarrow$ (б/д-ва) $\exists$ контур $AD_1B \subset G$, не имеющий общих внутр т-к с ACB и ADB $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{ACB} = \int_{AD_1B} \text{ и } \int_{ADB} = \int_{AD_1B} \Rightarrow \int_{ACB} = \int_{ADB} \quad \blacktriangle \text{I})$$

ΔII) Обозн $\int\limits_{M_0M} Pdx+Qdy = u(M) = u(x,y)$

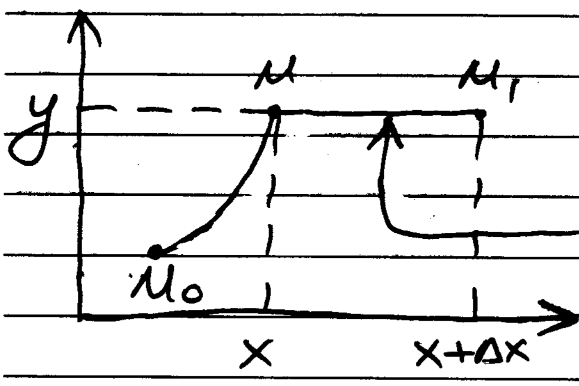
M_0 фикс, M перем; не зависит от выбора $M_0M \subset G$

и рассм $\Delta_x u = u(\overbrace{x+\Delta x, y}^{M_1}) - u(\overbrace{x,y}^{M}) = u(M_1) - u(M) =$

$$= \int_{M_0M_1} Pdx+Qdy - \int_{M_0M} Pdx+Qdy = \left(\cancel{\int_{M_0M}} + \int_{MM_1}\right) - \cancel{\int_{M_0M}} =$$

19.6

$$= \int_{MM_1} Pdx + Q\,\cancel{dy}_{\,0} = \int_x^{x+\Delta x} P(x, \underset{const}{y})\,dx = P(\xi, y)\,\Delta x, \quad \xi \in [x, x+\Delta x]$$



ф-ла ср-го зн-ия для опр. $\int$-ла

$\widetilde{MM_1} \equiv$ отр MM_1 (т.к. $\int_{MM_1}$ не зависит от выбора $\widetilde{MM_1}$)

Т.о. $\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} = \underset{\text{непр}}{P}(\xi(\Delta x), y) \to P(x,y)$, $\Delta x \to 0$

$\xi \to x$ при $\Delta x \to 0$

$u_x(x,y)$, $\Delta x \to 0 \Rightarrow \exists\, u_x(x,y) = P(x,y)$

Ан-но $\exists\, u_y(x,y) = Q(x,y)$

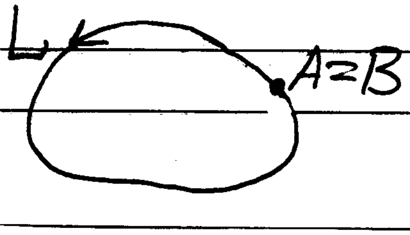
Итак, $Pdx + Qdy = u_x dx + u_y dy \equiv du$ ▲II)

Начало лекции 20

ΔIII) Пусть $\exists\, u(x,y)$: $du = Pdx + Qdy$,
т.е. $u_x = P$, $u_y = Q \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{AB} Pdx + Qdy \overset{\text{теор 3}}{=} \int_\alpha^\beta \Big[\underset{u_x}{P}(\varphi(t), \psi(t))\,\dot\varphi(t) + \underset{u_y}{Q}(\quad)\,\dot\psi(t)\Big]dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}\big[u(\underbrace{\varphi(t)}_{x}, \underbrace{\psi(t)}_{y})\big]dt =$$

$$= u(\varphi(t), \psi(t))\Big|_\alpha^\beta = u(\underbrace{\varphi(\beta), \psi(\beta)}_{B}) - u(\underbrace{\varphi(\alpha), \psi(\alpha)}_{A}) =$$



$$= u(B) - u(A)$$