Лекция 20

$$\boxed{\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy}$$

↑ формула Грина

Зам 1 Напомню, что символ $\oint$ означает кривол-ый $\int$ал II-го рода **по** ~~обл-ти G~~ при положит-м напр-ии обхода границе (говорят также: $\int$ал берётся по замкнутому контуру L в полож-м напр-ии обхода)

Зам 2 $$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix}$$

Δ **Док-во**

Δ I) **Сперва** док-м, что

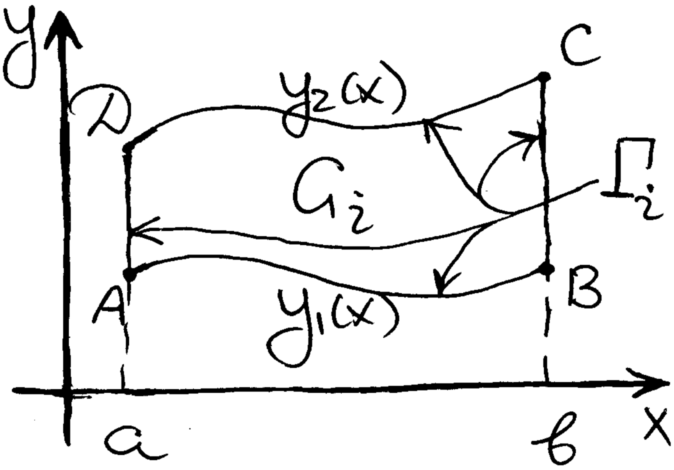
$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint\limits_L Pdx \qquad (I)$$

(можно считать, что мы положили $Q \equiv 0$)

Т.к. G – простое мн-во, то его можно представить в виде

$G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$, G_i – y-трап-ые мн-ва

20.2



Рассм-м ∬ал по ~~об~~ мн-ву G_i (с ∀-м $i=\overline{1,n}$)

$$\iint\limits_{G_i} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy \underset{\uparrow}{=}$$

ф-ла Н-Л

т.к. $\frac{\partial P}{\partial y}$ непр-на

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy \overset{\downarrow}{=}$$

$$= \int_a^b dx \cdot P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} \underset{\uparrow}{=} \int_a^b P(x,y_2(x))\,dx - \int_a^b P(x,y_1(x))\,dx \qquad (1)$$

лин-ое св-во опр-го ∫ла

Рассм-м теперь каждый из этих опр-х ∫ов

Заметим, что

1) Т.к. гр-ца Γ_i – кусочно-гл-ая кривая ⟹ кривые $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$ – также кусочно-гладки

2) Т.к. $P(x,y)$ непр на (замкн-м) мн-ве G_i ⟹ она непр-на **и** на его границе ⟹ ⟹ непр-на на кривых $y=y_i(x)$

Из 1)+2) по теор 3 ⟹

$$\int_a^b P(x,y_2(x))dx = \int_{DC} P(x,y)dx = -\int_{CD} P(x,y)dx$$

$$\int_a^b P(x,y_1(x))dx = +\int_{AB} P(x,y)dx \qquad (2)$$

На отр-х AD и BC пер-ую x можно рассм-ать как ф-цию y:

$$\left.\begin{array}{l}\text{На } AD \quad x(y) \equiv a = const \\ \text{На } BC \quad x(y) \equiv b = const\end{array}\right\} \Rightarrow dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_{BC} P(x,y)dx = \int_{DA} P(x,y)dx = 0 \qquad (3)$$

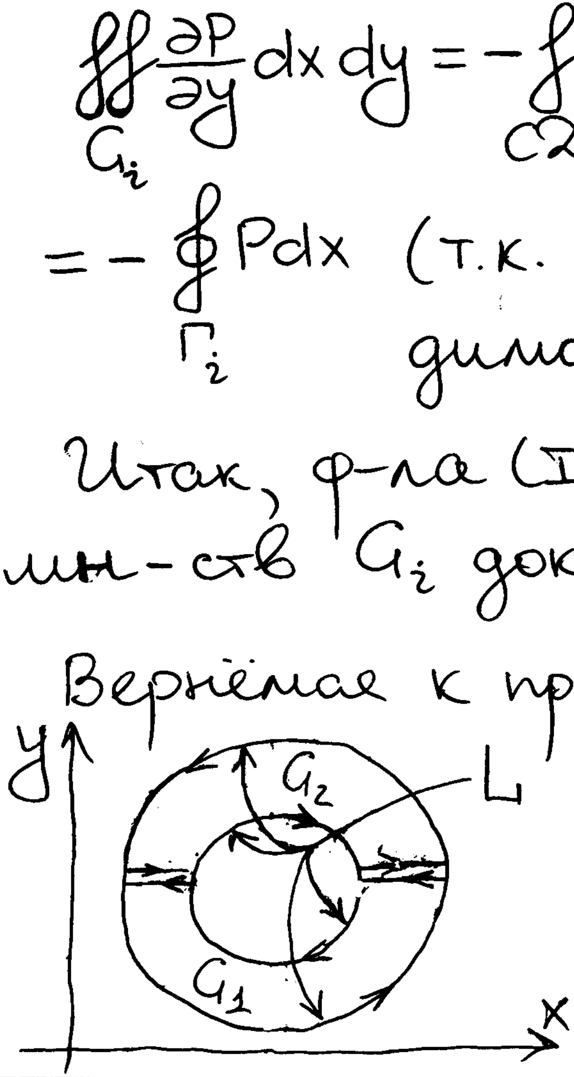
Из (1), (2) и (3) получаем, что

$$\iint_{G_i} \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy = -\int_{CD} Pdx - \int_{AB} Pdx - \int_{BC} Pdx - \int_{DA} Pdx =$$

$$= -\oint_{\Gamma_i} Pdx$$ (т.к. $CD+AB+BC+DA=\Gamma_i$, обходимой в полож-м напр-ии)

Итак, ф-ла (I) для случая y-трап-ых мн-ств G_i док-на

Вернёмся к произв-ому мн-ву G



$\int$ы по внутр-им участкам границ сокращаются

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma_1} + \oint_{\Gamma_2} = \oint_L$$

Γ_i - гр-цы G_i

L - гр-ца $G = G_1 \cup G_2$

$$\iint\limits_{G}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\iint\limits_{G_1}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy+\dots+$$

$$+\iint\limits_{G_n}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=-\oint\limits_{\Gamma_1}Pdx-\dots-\oint\limits_{\Gamma_n}Pdx=-\oint\limits_{L}Pdx$$

(на рис. для простоты был проилл-ан случай $G=G_1\cup G_2$; ~~но~~ очевидно, что если $G=G_1\cup\dots\cup G_n$, то $\oint\limits_{\Gamma_1}+\dots+\oint\limits_{\Gamma_n}=\oint\limits_{L}$) $\not\Delta$ I)

ΔII) Ан-но док-ся, что

$$\iint\limits_{G}\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=+\oint\limits_{L}Qdy \qquad (II)$$

(только мн-во G следует разбить на x-трап-ые части) $\not\Delta$ II)

(II)-(I):

$$\iint\limits_{G}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_{L}Pdx+Qdy \qquad \not\Delta$$

Зам Можно док-ть, что ф-ла Грина спр-ва не только для простого мн-ва, но и для ∀ замкн-го мн-ва, граница которого состоит из конечного числа кусочно-гладких (замкн-х) кривых

Сл-ие $\boxed{20.5}$

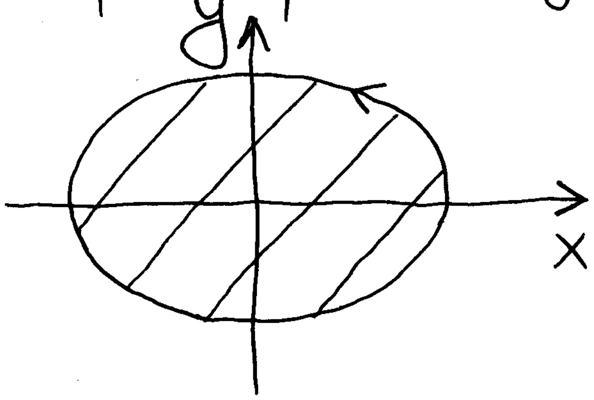
Положим $P=-y$, $Q=+x$ ф-ла Грина

$$\Rightarrow \oint\limits_L P dx + Q dy = \oint\limits_L x dy - y dx \overset{\downarrow}{=}$$

$$= \iint\limits_G \left[\frac{\partial(+x)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right] dxdy = \iint\limits_G 2dxdy = 2S(G)$$

$$\Rightarrow S(G) = \frac{1}{2}\oint\limits_L x dy - y dx$$

Пример Найдём площадь эллипса:



$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$x = a\cos t$ – параметр-ие
$y = b\sin t$ ур-я эллипса

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L x dy - y dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}[a\cos t\, d(b\sin t) -$$

$$- b\sin t\, d(a\cos t)] = \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \pi ab$$

При $a=b=R \Rightarrow S = \pi R^2$

(§5) Св-ва крив-ых $\int$ов II-го рода

Кривол-ые $\int$лы II-го рода обладают св-ми лин-ти, ~~монот-ти~~ и аддит-ти, но для них не обл-ют!

неспр-вы оценка модуля и ф-ла среднего зн-ия. Кроме того, крив-ые $\int$лы II-го рода обл-ют рядом новых св-в, одним из кот-х явл-ся ф-ла Грина. Ещё несколько новых св-в содержат две теоремы наст-го §-фа

Теор 6.1 Пусть ф-ии $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в обл-ти G. Тогда сл-ие усл-ия эквив-ны:

1) $\forall$ простой замкнутой кусочно-гладкой кривой $L \subset G$ ($\equiv$ замкнутый контур $\subset G$)

$$\Rightarrow \oint_L P dx + Q dy = 0$$

2) $\forall$ фикс-х т-к A и $B \in G \Rightarrow \int_{AB} P dx + Q dy$ не зависит от пути $\int$ия, т.е. от выбора простой кусочно-гладкой кривой $\equiv$ контура, соедин-ей эти точки

3) Выр-ие $P dx + Q dy$ явл-ся полным диф-ом, т.е. $\exists$ ф-я $u = u(M) = u(x,y)$:

$$du = P dx + Q dy$$

Зам Утв-ие этой т-мы обладает изв-ым вам физич-м смыслом. Если $\{P, Q\}$ рассм-ать

Как компоненты силы

$\vec{F} = \{P, Q\}$, $\vec{F} = \vec{F}(M)$, то

↑ сила (на ед-цу массы или заряда) ↑ силовое (векторное) поле

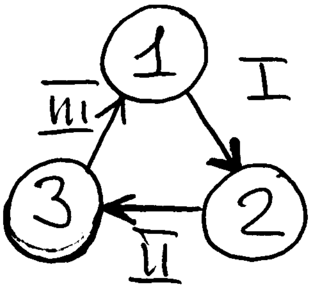
1) Работа $\mathcal{A}$ по ∀ замкн-му контуру $= 0$

2) $\mathcal{A}$ не зависит от пути $\int$ия

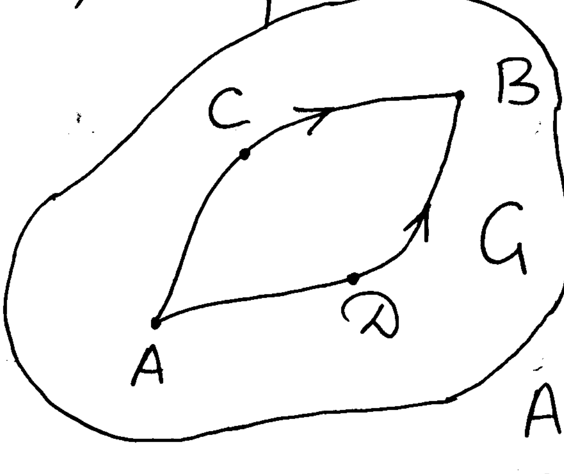
3) ∃ потенциал $u(x,y)$: $\operatorname{grad} u = \vec{F}$, т.е. $u_x = P$, $u_y = Q$

Силы $\vec{F}$, облад-ие этими св-ми обычно наз-ют консерв-ми, а отв-ие им поле — потенциальными

Δ



ΔI) Сперва так:



~~Утв (без док-ва):~~ Пусть контуры ACB и ADB не имеют общих внутр-х точек. Тогда ACBDA — замкнутый контур

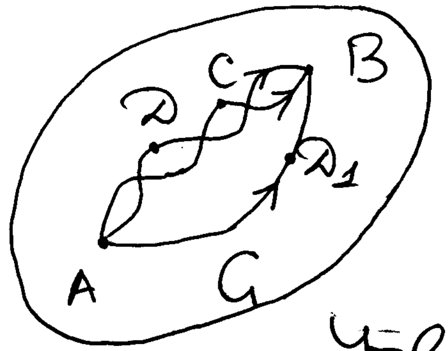
и ⇒ определён $\oint\limits_{ACBDA} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{ACB} + \int\limits_{BDA} =$

$\parallel$ — по усл 1)

0

$$= \int_{ACB} - \int_{ADB} \Rightarrow \int_{ACB} = \int_{ADB}$$

А потом так:



Пусть теперь контуры ACB и ADC имеют любое число пересечений

Утв (бу Δ-ва): ∀ пары контуров ACB и ADB $\subset$ обл-ть G, ∃ контур $AD_1C \subset G$, не имеющий общих внутр-х точек с ACB и ADB

Отсюда и из док-го выше получаем, что

$$\int_{ACB} = \int_{AD_1B}, \int_{ADB} = \int_{AD_1B} \Rightarrow \int_{ACB} = \int_{ADB}$$ ~~Δ~~I)

ΔII) Рассм

$$\int_{\underset{\text{фикс}}{M_0}\underset{\text{перем}}{M}} \underbrace{P\,dx+Q\,dy}_{\text{фикс}}$$

т.к. $\int_{M_0M}$ не зависит от ~~пути~~ выбора пути $\int$ия, то при фикс-х M_0, P и Q он явл-ся лишь ф-ей M, которую мы обозначим через $u(M)$:

$$\Rightarrow \int_{M_0M} P\,dx+Q\,dy = u(M) = u(x,y)$$

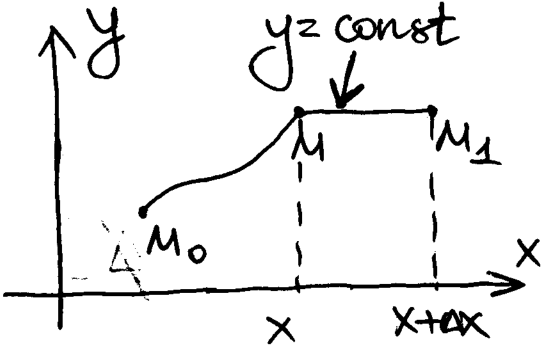
Рассм-м $\Delta_x u$ (т.к. G – обл-ть ⇒ ⇒ M – внутр-яя т-ка ⇒ в т. M при дост-но малых Δx и Δy опр-ны $\Delta_x u$ и $\Delta_y u$)

$$\Delta_x u \equiv u(x+\Delta x, y) - u(x,y) \equiv u(M_1) - u(M) =$$

$$= \int_{M_0M_1} Pdx + Qdy - \int_{M_0M} Pdx + Qdy = \left(\cancel{\int_{M_0M}} + \int_{MM_1}\right) - \cancel{\int_{M_0M}} =$$

$$= \int_{MM_1} Pdx + Q\cancelto{0}{dy} = \int_{\underset{\text{фикс-н}}{x}}^{x+\Delta x} P(\overset{\text{перем}}{x}, \underset{\text{const (пар-тр)}}{y})\,d\overset{\text{перем}}{x} = P(\xi, y)\cdot\Delta x, \quad \xi \in [x, x+\Delta x]$$

ф-ла среднего зн-ия по перем-ой x для ∫ла от непр-й ф-ии P



Отсюда $\underbrace{\frac{\Delta_x u}{\Delta x}}_{\downarrow\ u_x(x,y),\ \Delta x \to 0} = P(\xi(\Delta x), y) \longrightarrow P(x,y),\ \Delta x \to 0$

$\xi(\Delta x) \to x$ при $\Delta x \to 0$

$$\Rightarrow \exists\ \frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$$

Ан-но $\exists\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$

Итак, $Pdx + Qdy = u_x dx + u_y dy \equiv du$ $\blacktriangle$ II)

Δ III) Пусть $\exists\ u(x,y)$: $du \equiv u_x dx + u_y dy =$

$= Pdx + Qdy,$

т.е. $u_x = P$, $u_y = Q$

$\boxed{20.10}$

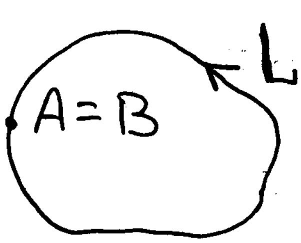
$$\Rightarrow \int\limits_{AB} Pdx+Qdy \underset{\text{теор 3}}{=} \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[P(\varphi(t),\psi(t))\dot\varphi(t)+\right.$$

$$\left.+Q(\ )\dot\psi(t)\right]dt=$$

$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[u_x(\varphi(t),\psi(t))\dot\varphi(t)+u_y(\ )\cdot\dot\psi(t)\right]dt=$$

$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{d}{dt}\left[u(\underset{x}{\underset{\shortparallel}{\varphi(t)}},\underset{y}{\underset{\shortparallel}{\psi(t)}})\right]dt=u(\varphi(t),\psi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta}=$$

$$=u(\varphi(\beta),\psi(\beta))-u(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))=u(B)-u(A)$$



Но для замкнутого контура A=B

$$\Rightarrow \oint\limits_{L} Pdx+Qdy = u(A)-u(A)=0 \qquad \not\Delta\,\underline{\text{III}})$$

Зам 1 В процессе док-ва т-мы мы установили важную формулу:

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy=\int\limits_{AB} du = u(B)-u(A),$$

связывающую работу консервативной силы (по перем-ию единичной массы или единичного заряда) с потенциалом

Зам 2 $du = Pdx + Qdy \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \operatorname{grad} u = \{P, Q\}$$