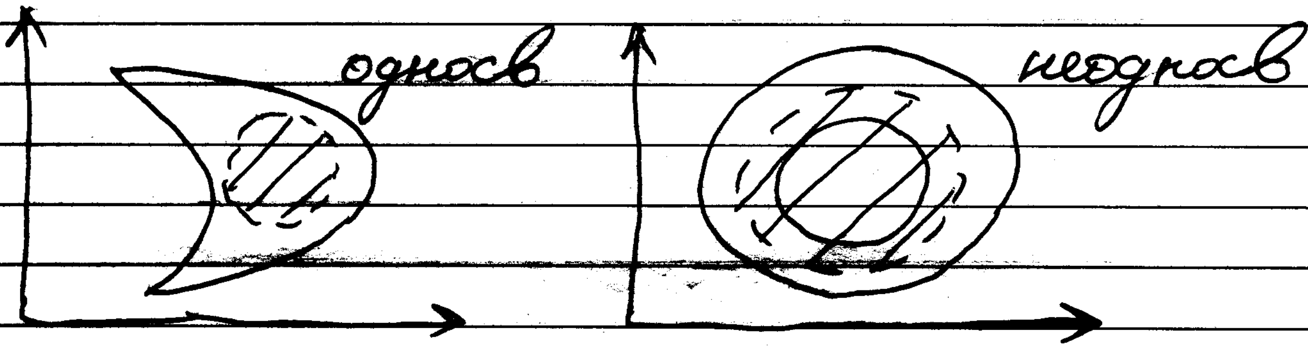
$\Rightarrow \oint\limits_L Pdx + Qdy = u(A) - u(A) = 0$ ▲(III)

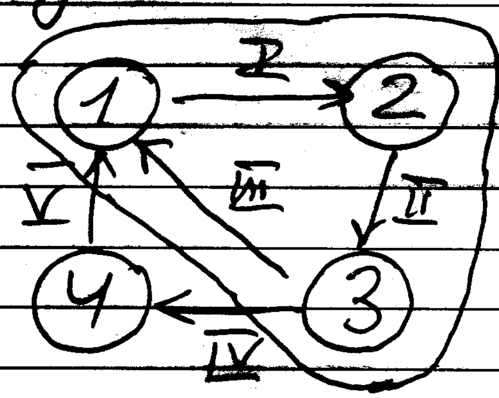
Зам Мы устан-ли, что если $\exists$ потенциал u, то $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AB} du = u(B) - u(A)$

Опр Мн-во $G \subset E^2$ наз односвязным, если $\forall$ простой замкн-й кривой $\subset G$ часть пл-ти, огр-ая этой кр-й, также $\in G$



Теор 6.2 Пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y) \in C^1(G)$, G — односвязн область. Тогда усл 1)–3) теор 6.1 экв-ны усл-ю:

4) $\dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в G

Δ 

теор 6.1
I–IV — $\forall$ обл G
V — только для односв-й

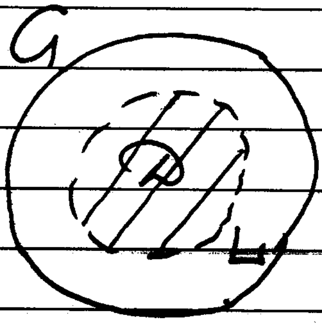
Δ IV) Пусть $\exists\, u(x,y)$: $du = Pdx + Qdy$, т.е. $u_x = P$, $u_y = Q$

Т.к. $P, Q \in C^1(G) \Rightarrow P, Q$ диф в G, т.е.

u_x, u_y диф в $G \Rightarrow u$ – 2-ды диф в $G \Rightarrow$

$\Rightarrow (u_x)_y = (u_y)_x$ в G, т.е. $P_y = Q_x$ в G $\blacktriangle$ IV)

Δ V) Пусть $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ в односв-й обл G



и пусть L – $\forall$ замкн контур $\subset G \Rightarrow D \subset G \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для D и L вып-ны усл-я теор о ф-ле Грина $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \oint_L P\,dx + Q\,dy = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{\equiv 0} dx\,dy = 0$$

$\blacktriangle$ V)

Глава XIII Поверхностные $\int$-лы

§1 Площадь поверхности

Пов-ти S могут быть заданы:

1) явно – как график ф-ии $z = f(x,y)$
2) неявно – как $\{M(x,y,z) \mid F(x,y,z)\}$
3) парам-ки: $S \equiv \{M(x,y,z) \mid x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v), z = \chi(u,v), (u,v) \in \bar{G}\}$, где $\bar{G}$ – замкн-я область, $\varphi, \psi, \chi \in C(\bar{G})$

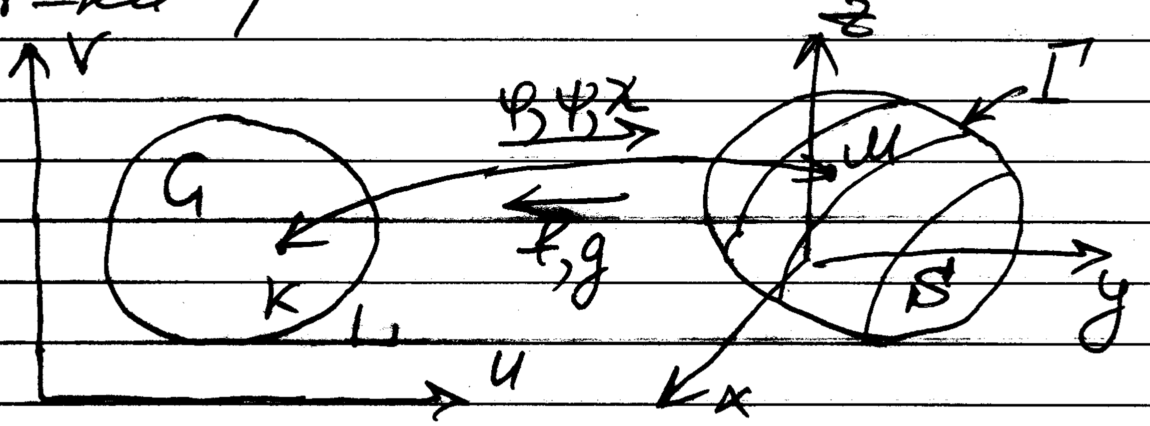
Пусть $M^{u,v} \equiv M(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))$ — произв-я т-ка пов-ти S

Опр т. $M \in S$ наз простой, если $\exists!\,(u,v) \in \bar{G} : M = M^{u,v}$

частный случай особых

("непростые" т-ки наз кратными — самопересеч, наложение и т.д.)

Опр Пов-ть наз простой, если все её ~~точки~~ т-ки простые



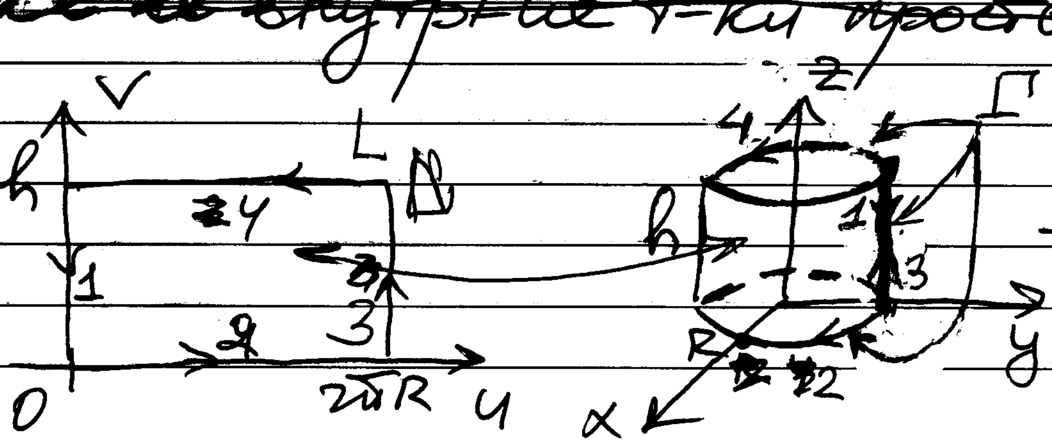
Пусть L — гр-ца ~~от~~ G ($\bar{G} = G + L$)

$\Rightarrow \Gamma \equiv \{M^{u,v} \mid (u,v) \in L\}$ — гр-ца S

~~т. $M \in S \setminus \Gamma$ — внутр т. S~~ — не краевые (см. след лекцию)

Опр Пов-ть наз почти простой, если $\forall$ т. $M \in S \setminus \Gamma$ — простая

~~все её внутренние т-ки простые~~



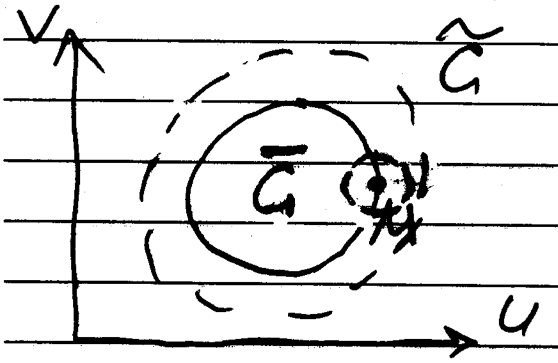
цилиндр — почти простая пов-ть

Пусть $\vec r(u,v)=\varphi(u,v)\vec i+\psi(u,v)\vec j+\chi(u,v)\vec k$ — радиус-вектор пов-ти S 20.4

Опр Простая пов-ть S наз регулярной, если:

1) $\varphi,\psi,\chi\in C^1(\bar G)$ ~~геом смысл~~

2) $[\vec r_u,\vec r_v]\neq\vec\theta$ в $\bar G$ ($\vec r_u \nparallel \vec r_v$)



Зам 1) $\varphi\in C^1(\bar G)\equiv$

$\equiv\exists\tilde G\supset\bar G:\varphi\in C^1(\tilde G)$

2) $N=[\vec r_u,\vec r_v]$ — вектор нормали к пов-ти S в т. $M_{u,v}$

Опр Почти простая пов-ть наз почти рег-ой, если: (убедимся позже)

1) $\varphi,\psi,\chi\in C^1(G)$

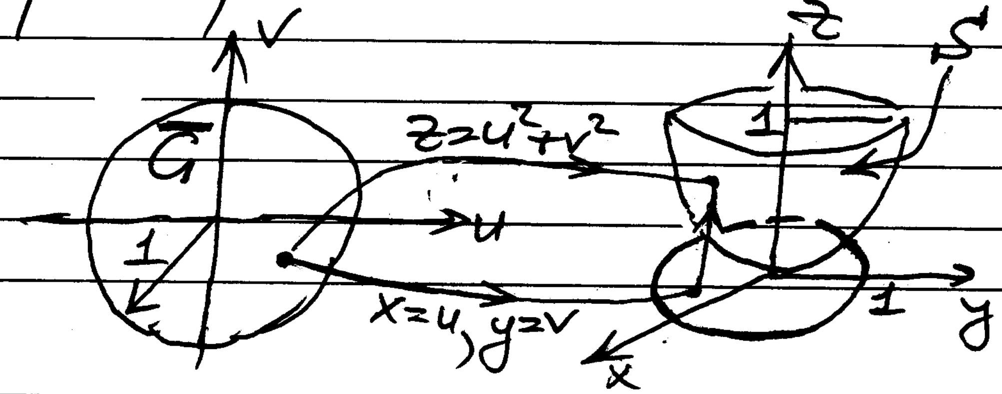
2) $[\vec r_u,\vec r_v]\neq\vec\theta$ и огр-но в G

Зам Регул-ые $\subset$ Гладкие $\subset$ Почти рег-ые

∀ параб-д   цилиндр, сфера   конус

Примеры

1)



$z^2=x^2+y^2$

$0\le z\le 1$

20.5

$$S:\begin{cases} x=u\\ y=v\\ z=u^2+v^2\end{cases} \Rightarrow \vec r=\{u,v,u^2+v^2\},\ (u,v)\in \underset{\text{круг}}{\bar{G}}$$

$$[\vec r_u, \vec r_v] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k\\ 1&0&2u\\ 0&1&2v\end{vmatrix} = \overset{A}{-2u}\,\vec i\ \overset{B}{-2v}\,\vec j\ \overset{C}{+\underset{\neq 0}{1}}\cdot\vec k \neq \Theta$$

$\Rightarrow S$ – регул-ая пов-ть

Нап, что $\vec N=\{A,B,C\}=\{-2x,-2y,1\}$ – вектор (верхней) нормали ~~(в данном случае верхней)~~ к пов-ти S в т. $M^{x,y} =$
$= M(x,y,z(x,y))$

Доп: в будущем упростить термино-логию, приравняв почти простые и почти регулярные к соотв-но простым и регул-м пов-м (т.е. расширить класс простых и регул-х пов-ей), тем более, что из-за проблем со связно-стью вложение гладкие $\subset$ почти рег-ые на самом деле несправ-во (просто заметить, что регулярные явл-ся гладки-ми во всех внутр-х точках)