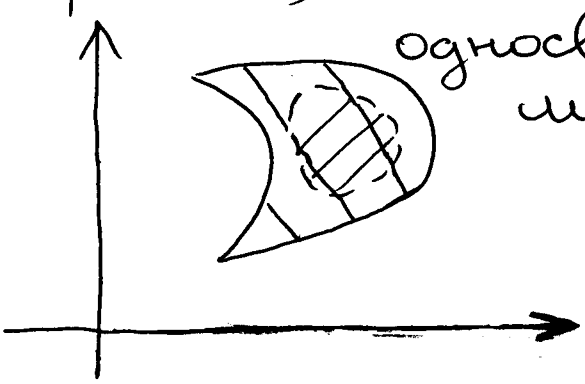
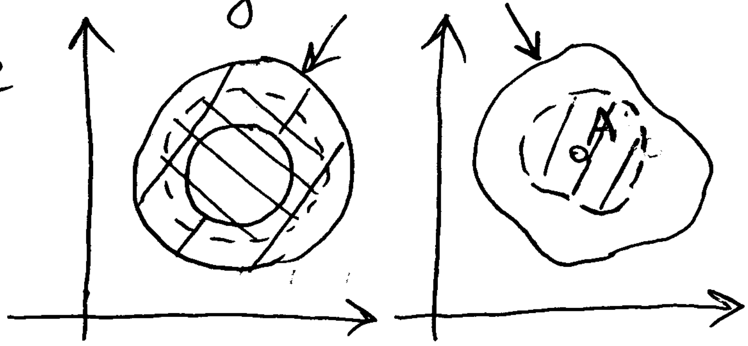
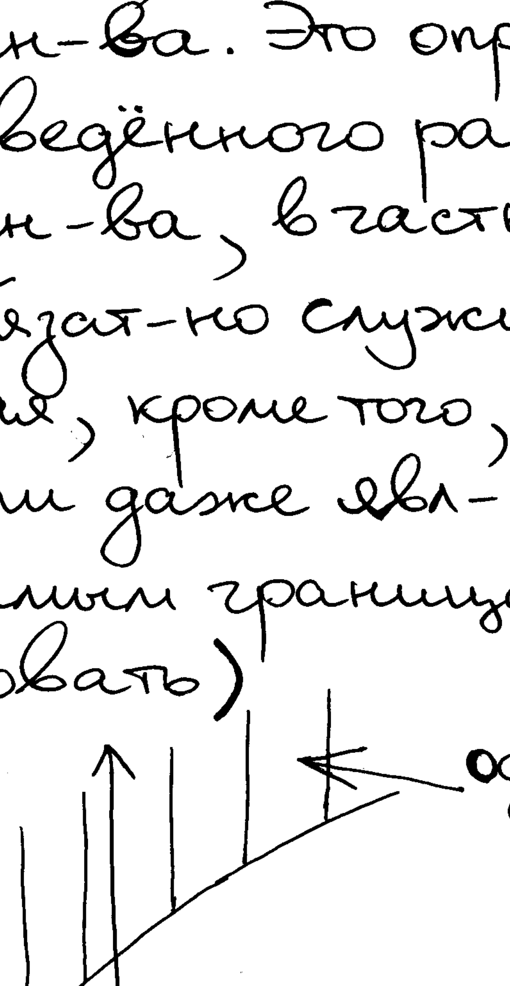
Лекция 21

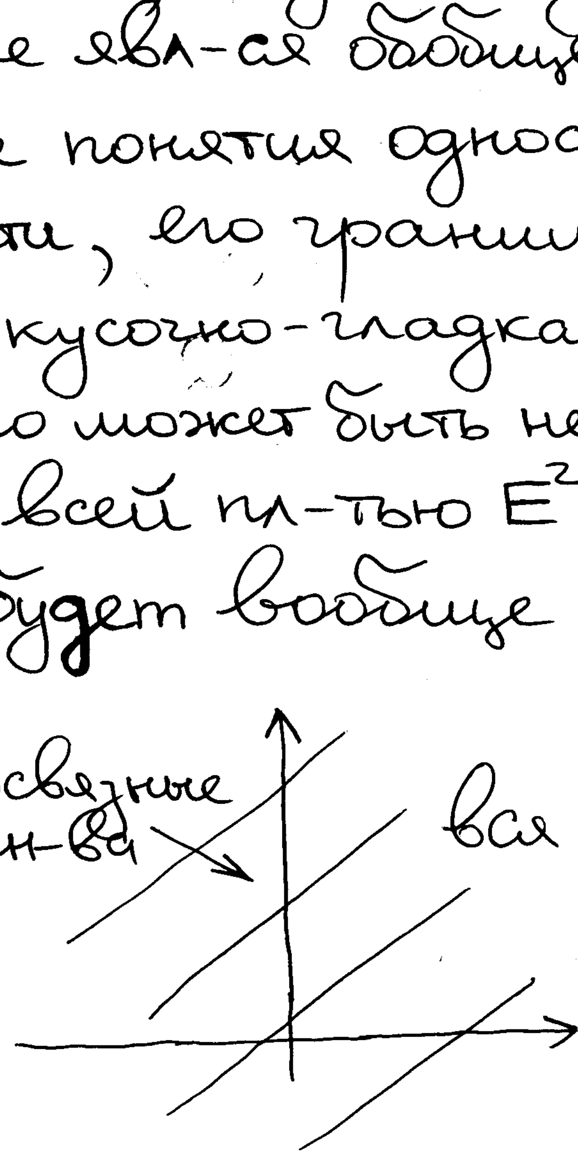
Опр Мн-во $G \subset E^2$ наз-ся односвязным, если для любой **простой** замкнутой кривой $L \subset G$ часть пл-ти, огр-ченная этой кривой, также $\subset G$





Зам У нас уже было понятие многосвязного и, в частности, — односвязного мн-ва. Это опр-ие явл-ся обобщением введённого ранее понятия односв-го мн-ва, в частности, его границей не обязат-но служит кусочно-гладкая кривая, кроме того, оно может быть неогран-м, или даже явл-ся всей пл-тью E^2 (тем самым граница будет вообще отсутствовать)



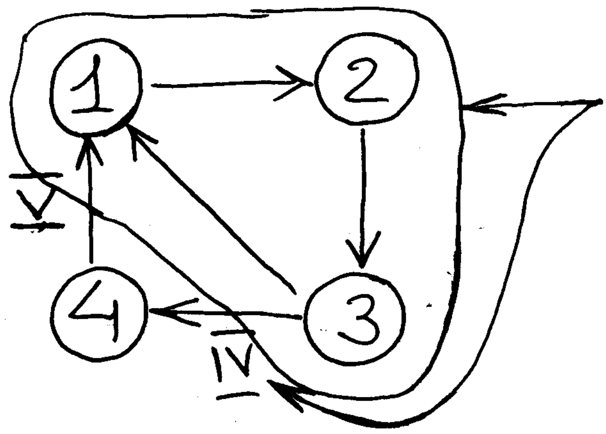


Теор 6.2 Пусть ф-ии P и Q имеют непр-ые частные произв-ые 1-го порядка в односвязной обл-ти G. (Пусть P и $Q \in C^1(G)$, где G — односвязная область $\subset E^2$.) Тогда усл-я 1) – 3) теор 6.1, а также усл-ие

4) $\dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в обл-ти G

эквивалентны

Δ



это спр-во ∀ обл-ти G (а $\underline{V}$ — только для односвязной)

Δ$\underline{IV}$) Пусть $\exists\, u(x,y): du = Pdx + Qdy$,

т.е. $u_x = P$, $u_y = Q$

Т.к. P и $Q \in C^1(G) \Rightarrow P$ и Q диф-мы в обл-ти G, т.е. u_x и u_y диф в $G \Rightarrow$ сама ф-я u — дважды диф-ма в $G \Rightarrow$

$\Rightarrow (u_x)_y = (u_y)_x$ в G, т.е. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в G ▲$\underline{IV}$)

Δ$\underline{V}$) Пусть $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в односв-й обл-ти G

и пусть L – произв-ый замкнутый контур $\subset G$

Т.к. G – односв-ая, то $\mathcal{D} \subset G$

(мы считаем, что $\mathcal{D}$ замкнуто, т.е., что $\mathcal{D} \supseteq L$)

$\Rightarrow$ (по ф-ле Грина – здесь вып-ны все условия теор. 5)

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_{\mathcal{D}} \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{\equiv 0} dx dy = 0,$$

т.е. вып-но усл-ие 1) $\Delta \overline{V}$)

Глава XIII Поверхностные $\int$-лы

§1 Площадь поверхности

Поверхности могут быть заданы:

1) явно – как график ф-ии $z = f(x,y)$
2) неявно – как мн-во точек, удовл-их ур-ию $F(x,y,z) = 0$
3) парам-ки

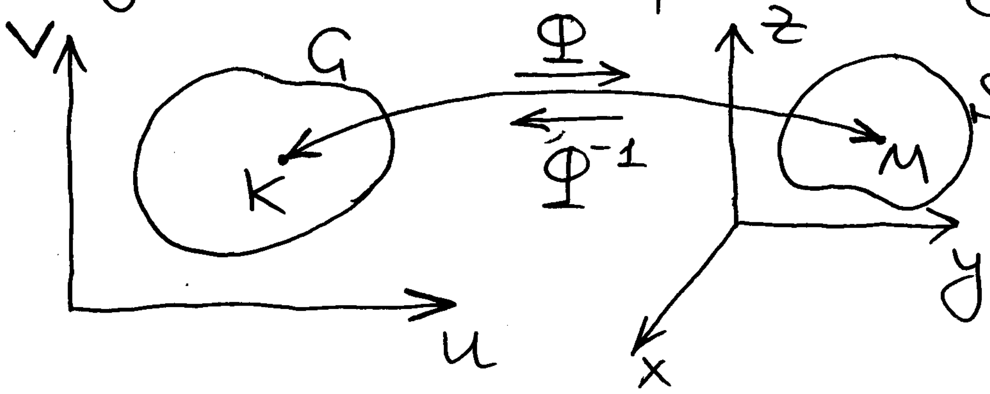
самый общий способ $\longrightarrow$ $S: \begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ z = \chi(u,v) \end{cases}$ пар-ры

Ясно, что на все эти ф-ии, чтобы они действ-но опр-ляли мн-ва, которые соотв-ли естеств-ым предст-ям о пов-ях (точнее строгому опр-ию пов-ти, являющемуся формализацией этих естеств-х предст-ий), следует накладывать некоторые ограничения

Я не буду приводить общего опр-ие пов-ти (оно слишком сложное), а ограничусь понятием простой пов-ти (ср. с понятием простой кривой)

Дополн-но:

Пусть $G \subset E^2$ – огр-ое связное замкн-ое мн-во



$\Phi(K)=\Phi(u,v)$

$\Phi^{-1}(M)=\Phi^{-1}(x,y,z)$

Пусть отобр-ие (вектор ф-ия)

$\Phi \equiv \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\chi(t) \end{cases}$ устан-ет взаимно одн-ое

соотв-ие между мн-ми G и S – это значит, что $\exists$-ет (обратное отобр-ие)

$$\Phi^{-1}(x,y,z) = \begin{cases} u = f(x,y,z) \\ v = g(x,y,z) \end{cases}$$ такое, что

$\Phi^{-1}[\Phi(K)]$, $K \in G$

Опр Мн-во $S = \{M(x,y,z) \mid x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v), z = \chi(u,v); (u,v) \in G\}$ наз простой пов-тью, если ф-ии φ, ψ, χ:

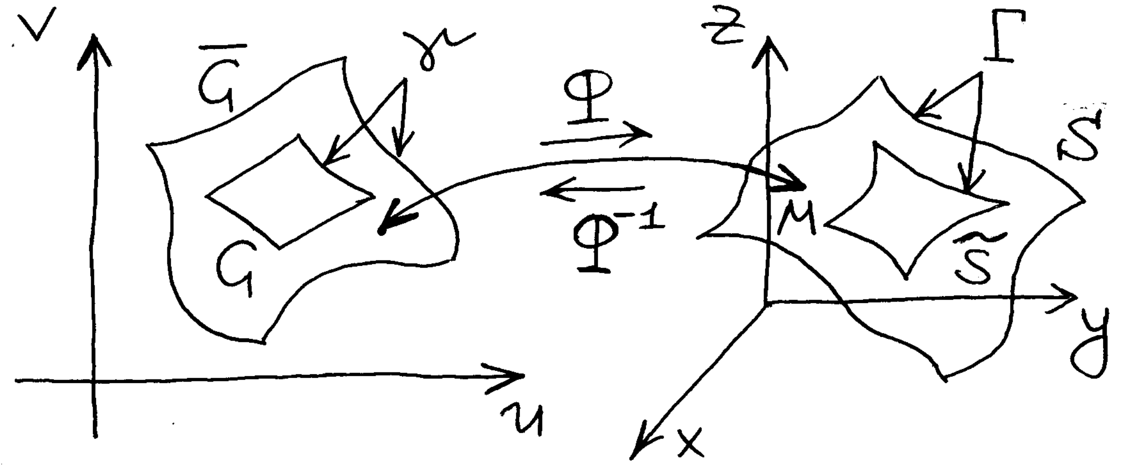
1) отобр-ие $\Phi = \{\varphi, \psi, \chi\} : G \mapsto S$ взаимно однозначно, т.е. $\exists$ обр-ое отобр-ие $\Phi^{-1} \equiv \{f, g\} : S \mapsto G$

2) $\varphi, \psi, \chi \in C(G)$

3) $f, g \in C(S)$

Зам Отобр-ие Φ, облад-ее св-ми 1)-3) наз-ся гомеоморфным отобр-ем или гомеоморфизмом между мн-ми G и S

Пусть $G \subset E^2$ – область (не обязат-но односвязная) с кусочно-гладкой границей γ (т.е. границей, состоящей из конечного числа кусочно-гладких кривых). Т.к. кусочно-гладкая кривая спрямляема, то G – квадрируема (вообще, из спрямляемости гр-цы мн-ва $\Rightarrow$ квадр-ть этого мн-ва)



~~$\tilde G \equiv G$~~
~~$\bar S \equiv \tilde S$~~

Образно выражаясь, простая пов-ть — деформированная плоская область

$\bar G \equiv G+\gamma \subset E^2 \qquad S=\tilde S+\Gamma\subset E^3$

$\Phi(G)\equiv\tilde S \Longleftrightarrow \Phi^{-1}(\tilde S)=G$

$\Phi(\gamma)\equiv\Gamma \qquad \left.\begin{matrix}\Phi^{-1}(\Gamma)\\ \Phi^{-1}(S)\end{matrix}\right\}$ могут $\nexists$

$\Phi(\bar G)\equiv S$

Пусть отобр-ие (вектор ф-ия)

$\Phi\equiv\begin{cases}x=\varphi(u,v)\\ y=\psi(u,v)\\ z=\chi(u,v)\end{cases}$ устан-ет взаимно однозначное соотв-ие между мн-ми $\bar G$ и S — это значит, что $\exists$-ет (обратное отобр-ие)

$\Phi^{-1}(x,y,z)=\begin{cases}u=f(x,y,z)\\ v=g(x,y,z)\end{cases}$ такое, что

$\Phi^{-1}[\Phi(K)]\equiv K,\ K\in\bar G$

~~⌈Зам (доп-но). Можно пок-ть, что~~

$\boxed{21.7}$

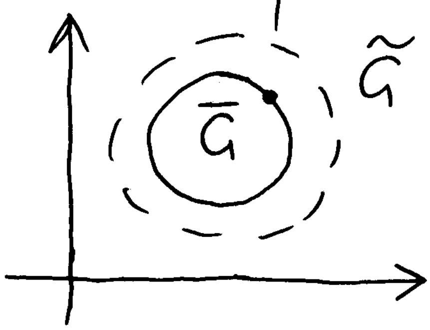
Опр Мн-во $S=\{M(x,y,z)\mid x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v),\ z=\chi(u,v);\ (u,v)\in\overline{G}\}$ наз-ся простой гладкой пов-тью, если ф-ии φ,ψ,χ:

1) отобр-ие $\Phi=\{\varphi,\psi,\chi\}:\overline{G}\mapsto S$ взаимно одн-но, т.е. $\exists$ обратное отобр-ие $\Phi^{-1}\equiv\{f,g\}:S\mapsto\overline{G}$

2) $\varphi,\psi,\chi\in C^1(\overline{G})$

3) $\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\varphi_u & \psi_u & \chi_u\\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v\end{pmatrix}\equiv 2\quad\forall(u,v)\in\overline{G}$ $\cancel{(\text{не }\overline{G})}$

Зам $\varphi\in C^1(\overline{G})\Longleftrightarrow\exists\tilde{G}\supset\overline{G}:\varphi\in C^1(\tilde{G})$



Доп зам Из 2), 3) $\Rightarrow$ $\Rightarrow f,g\in C^1(S)$ (в том смысле, что $\exists$ трёхмерная обл-ть $T\supset S$: $f,g\in C^1(T)$)

Опр Мн-во $\tilde{S}=\{M(x,y,z)\mid x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v),\ z=\chi(u,v);\ (u,v)\in\overline{G}\}$ наз-ся почти (простой) гладкой пов-тью, если ф-ии φ,ψ,χ:

1) отобр-ие $\Phi=\{\varphi,\psi,\chi\}:G\mapsto\tilde{S}$ взаимно одн-но, т.е. $\exists$ обратное отобр-ие $\Phi^{-1}\equiv\{f,g\}:\tilde{S}\mapsto G$

2) $\varphi,\psi,\chi\in C^1(G)$ и все ЧП огр в G

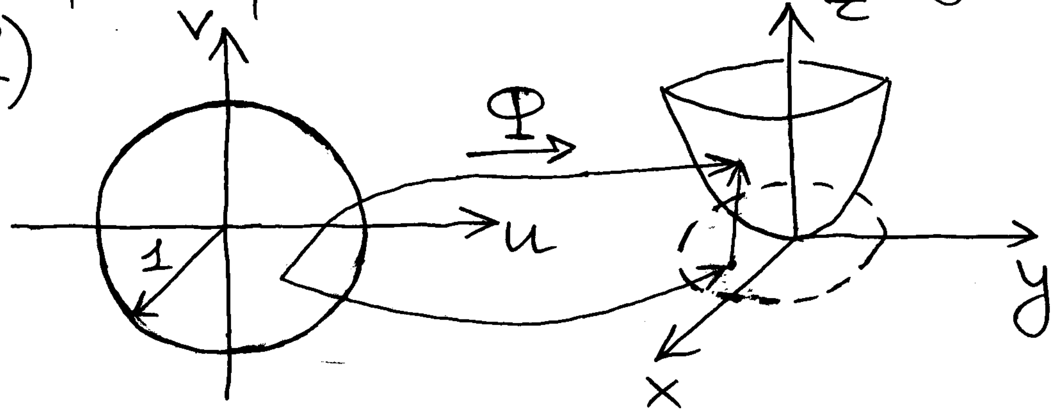
3) $\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\varphi_u & \psi_u & \chi_u\\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v\end{pmatrix}\equiv 2\quad\forall(u,v)\in G$ (не $\overline{G}$)

Зам 1) Можно док-ть, что граница ~~простой~~ почти гладкой пов-ти состоит из ~~простая~~ простых кусочно-гладк~~ая~~их крив~~ая~~ых $\subset E^3$

Зам 2 Почти гл-ая пов-ть – частный случай гладкой пов-ти

Примеры

1)



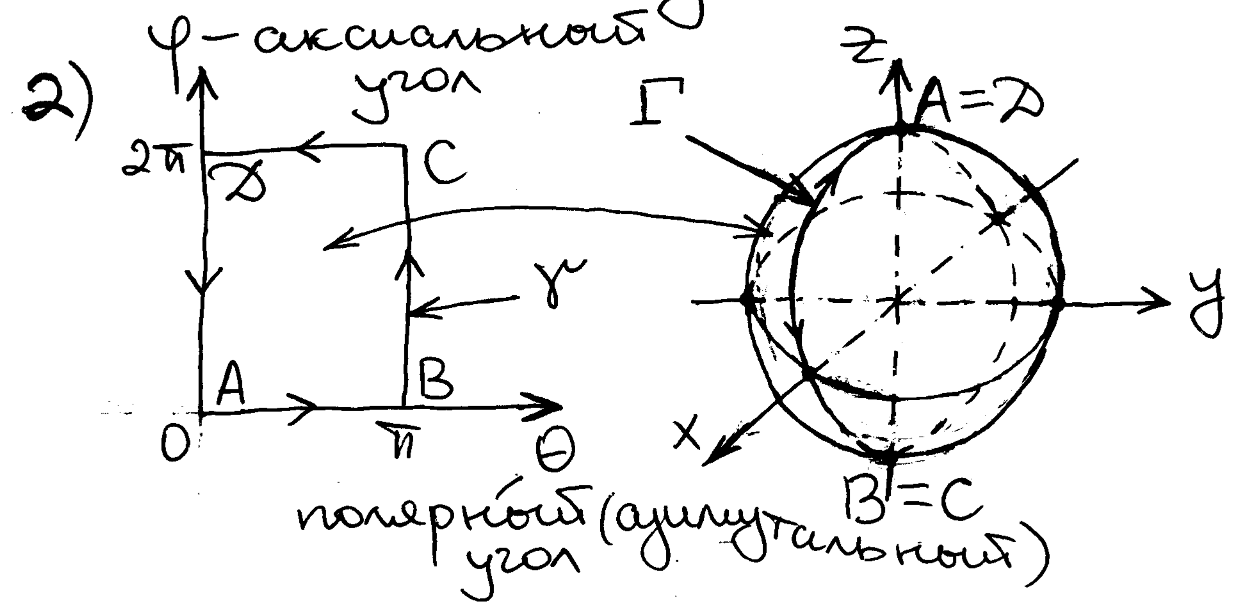
$z = x^2 + y^2$

$0 \le z \le 1$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} \qquad \mathcal{Y} \equiv \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{\neq 0} & \begin{matrix} 2u \\ 2v \end{matrix} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{rang} \mathcal{Y} = 2$$

2)



$$\begin{cases} x = R \sin\theta \cos\varphi \\ y = R \sin\theta \sin\varphi \\ z = R \cos\theta \end{cases}$$

$R \leftarrow$ const

θ, φ – парам-ры

$$\mathcal{J}=\begin{pmatrix} x_\theta & y_\theta & z_\theta & x_\theta \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi & x_\varphi \end{pmatrix}$$

A, C, B

Для вычисления ранга м-цы $\mathcal{J}$ рас-см-м три опр-ля: A, B и C

$$C=\begin{vmatrix} R\cos\theta\cos\varphi & R\cos\theta\sin\varphi \\ -R\overset{\sin}{\cancel{\cos}}\theta\sin\varphi & R\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}=R^2\sin\theta\cos\theta$$

$$A=R^2\sin^2\theta\cos\varphi,\quad B=R^2\sin^2\theta\sin\varphi$$

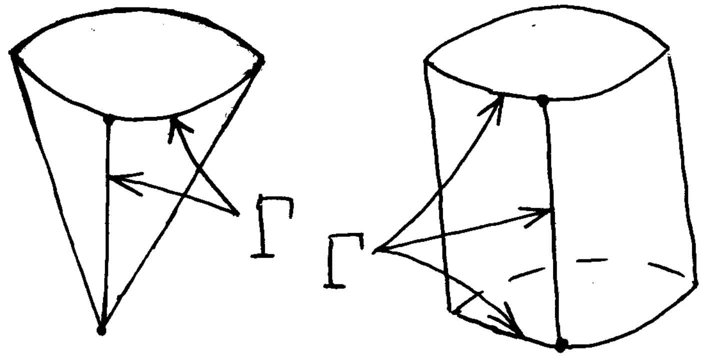
$$A^2+B^2=R^4\sin^4\theta,\quad A^2+B^2+C^2=R^4\sin^2\theta$$

$$\varphi\in(0,2\pi),\ \theta\in(0,\pi)\Rightarrow A^2+B^2+C^2\neq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{rang}\mathcal{J}\neq 0 \text{ в } G$$

Зам $\vec{N}=\{A,B,C\}$ – вектор ~~внешней~~ нормали к поверхности в т. $M(x(\theta,\varphi), y(\theta,\varphi), z(\theta,\varphi))\equiv$
$\equiv M(\theta,\varphi)\in S$

Доп-но:

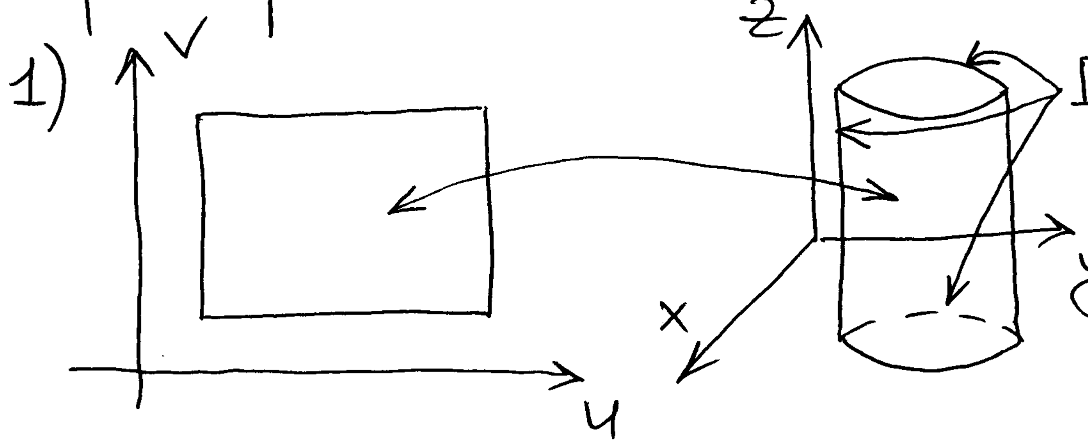


← почти гладкие пов-ти

Опр (~~Простая~~) **Кусочно**-гладкая пов-ть $\equiv$ $\equiv$ пов-ть, состоящая из конечного числа ~~простых~~ почти гладких пов-ей, не имеющих общих внутр-х точек

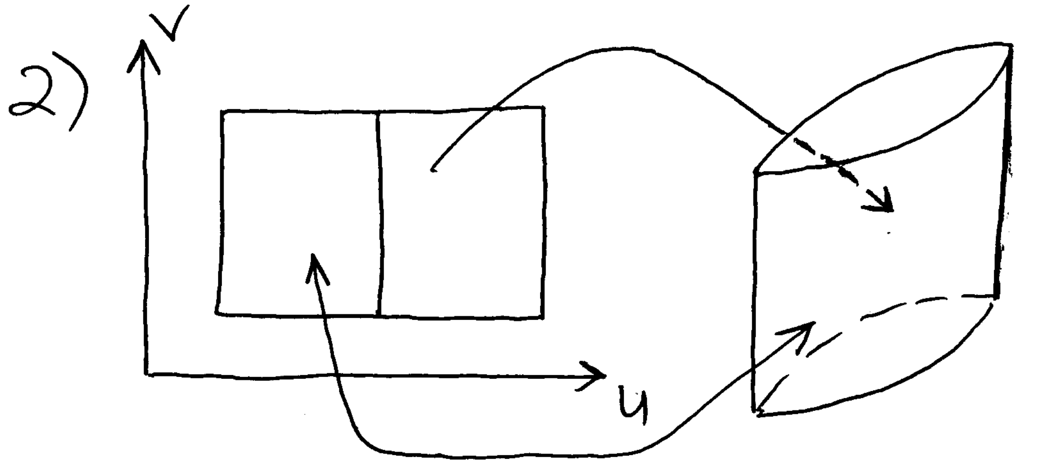
Примеры

1)



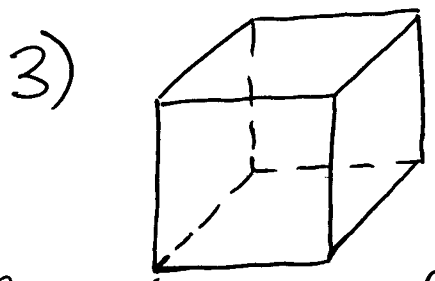
почти гладкая пов-сть (частный случай кусочно-гл-ой пов-ти)

2)



доп-но

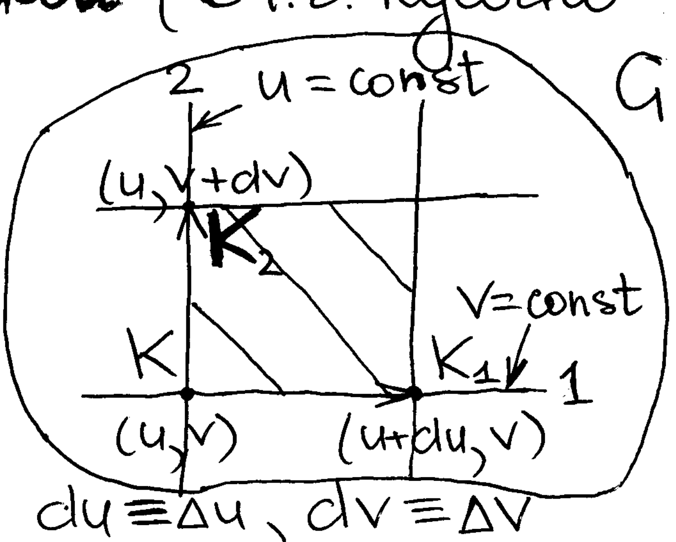
3)

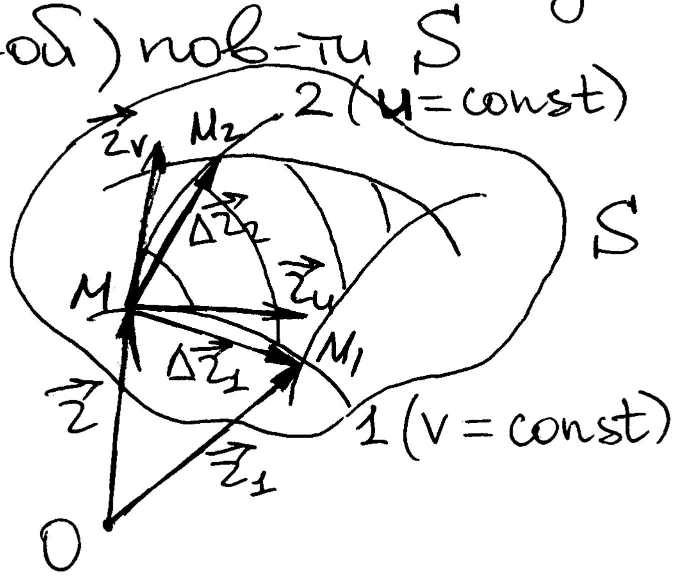


кусочно-гладкая пов-ть

Зам Все пов-ти, с которыми вы будете работать, явл-ся простыми кусочно-гл-ми пов-ми

Перейдём к опр-ию понятия площади простой или почти гладкой (в т.ч. кусочно-гл-ой) пов-ти S





$du \equiv \Delta u$, $dv \equiv \Delta v$

Кривые 1 и 2 — соотв-но коорд-ые линии u и v пов-ти S, проходящие через т. $M \in S$ (через каждую т-ку пов-ти проходят коорд-ые линии u и v) | 21.11

$$M(x, y, z) = M(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \equiv M(u,v),$$

а u и v наз-ют криволинейными координатами на пов-ти S