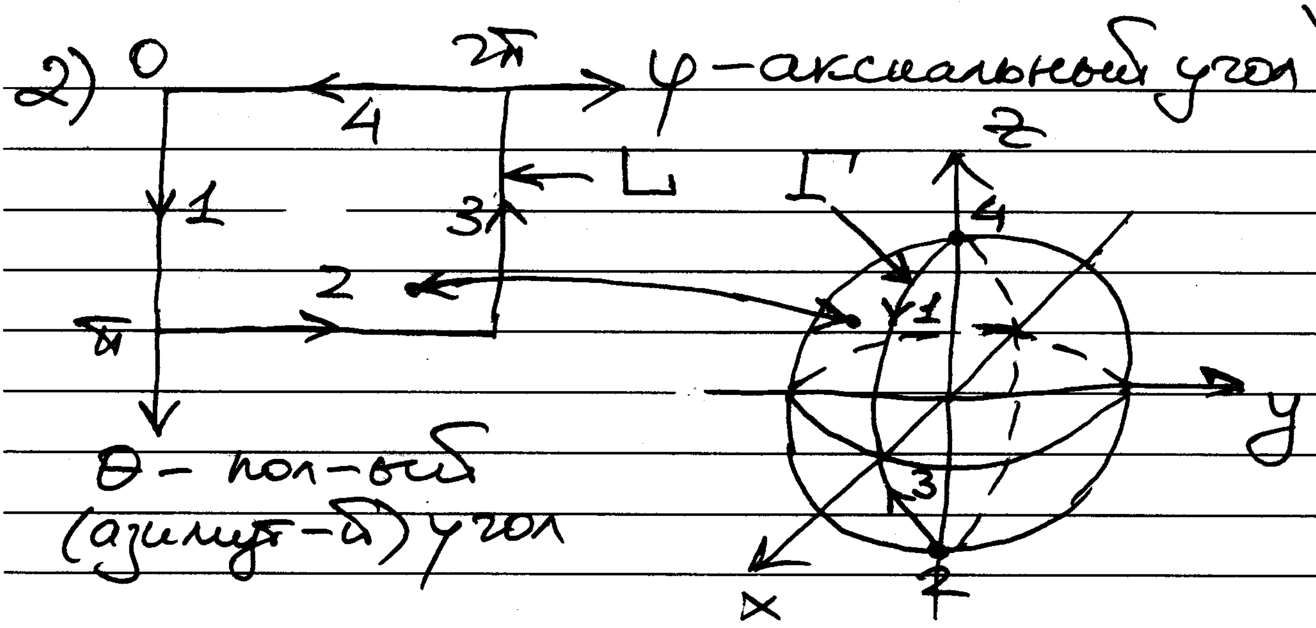
2)



$$S:\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases} \qquad R = const, \quad \theta, \varphi \text{ – пар-ры}$$

$$[\vec{r}_\theta, \vec{r}_\varphi] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

$$C = \begin{vmatrix} +R\cos\theta\cos\varphi & R\cos\theta\sin\varphi \\ -R\sin\theta\sin\varphi & R\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = R^2\sin\theta\cos\theta$$

$A = R^2\sin^2\theta\cos\varphi$, $B = R^2\sin^2\theta\sin\varphi$ – сам-но

$$[\vec{r}_\theta, \vec{r}_\varphi]^2 = \underbrace{A^2 + B^2}_{R^4\sin^4\theta} + C^2 = R^4\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \underbrace{[\vec{r}_\theta, \vec{r}_\varphi] \neq \vec{0}}_{\text{и огр}} \quad \forall(\theta, \varphi) \in (0, \pi)\times(0, 2\pi) \equiv \overset{\text{откр пр-к}}{G}$$

Но $[\vec{r}_\theta, \vec{r}_\varphi] = \vec{0}$ при $\theta = 0$ и π и $\forall \varphi$,

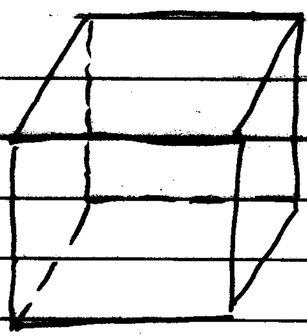
т.е. при $(\theta,\varphi) = (0,\varphi)$ и $(\pi,\varphi) \in \bar{G}$

Т.о., сфера – почти рег-ая, но не рег-ая пов-ть

Нап., что $\vec{N} = \{A, B, C\}$ – вектор (внешней) нормали к пов-ти S в т. $M^{\theta,\varphi}$

Опр Кусочно-~~гл-ая~~ рег-ая пов-ть – пов-ть, сост-ая из кон-го числа почти рег-ых пов-ей, не им-их общих внутр т-к

3)



куб – почти рег-ая (и почти гл-ая) пов-ть

Пусть G – кв-~~ая~~ дар обл-ть. Далее под рег-ми пов-ми подраз-ем в.т.ч. почти рег-ые

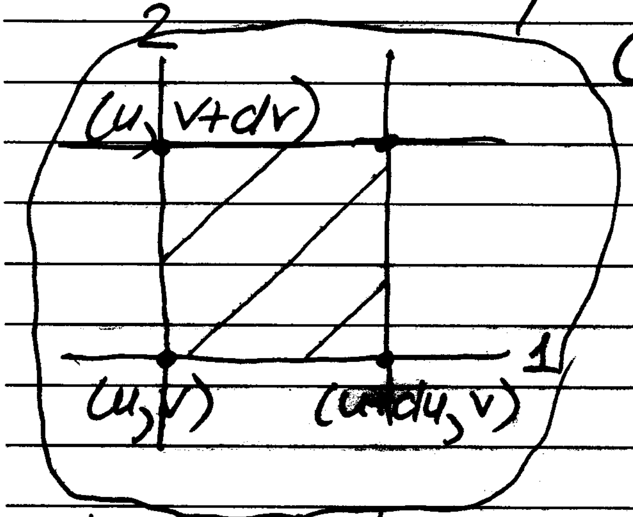
Опр Площадью рег-ой пов-ти Φ наз число, равное

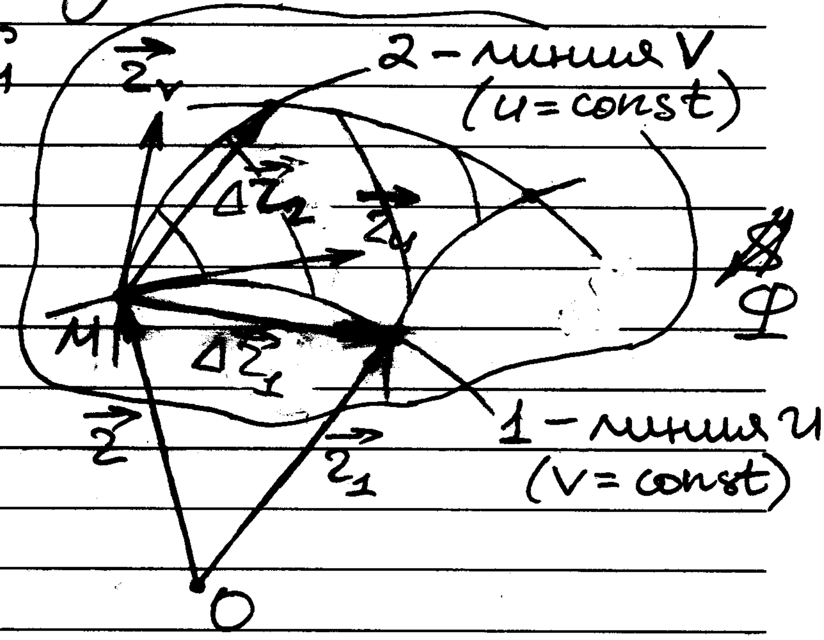
$$\iint\limits_G \underbrace{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}_{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| \text{ – ф-я } u \text{ и } v}\, du\, dv = S(\Phi)$$

Опр Пл-дь кусочно-рег-ой пов-ти ≡ 21.3

≡ сумме пл-ей рег-ых пов-ей, из кот-х она состоит

Геом смысл ф-лы для $S(\Phi)$





$du \equiv \Delta u$, $dv \equiv \Delta v$

Кривые 1 и 2 (в пр-ве XYZ) — соотв-но коорд-ые линии u и v пов-ти Φ

Через $\forall$ т. $M \in \Phi \setminus \Gamma$ проходят коорд-ые линии (кривые) u и v, поэтому u и v наз кривол-ми коорд-ми на пов-ти Φ

$$\Delta \vec{r}_1 \equiv \Delta_u \vec{r} \approx \underbrace{\vec{r}_u}_{\text{мгн-ая ск-ть по } u \text{ (при } v=\text{const) в т. } M} \cdot \Delta u, \quad \Delta \vec{r}_2 \equiv \Delta_v \vec{r} \approx \vec{r}_v \cdot \Delta v$$

Обосновать на словах, что $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ напр по касат-м к линиям u и v соотв-но

Нап, что $[\Delta\vec{r}_1, \Delta\vec{r}_2] \equiv \Delta\vec{S}$ — вектор пл-ди

$$\Delta\vec{S} \approx [\vec{r}_u du, \vec{r}_v dv] = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]\,du\,dv$$

Из рис видно, что $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \equiv$
$\equiv \{A, B, C\}$ — в-р нормали к касат пл-ти к пов Φ в т. M $\equiv$ в-р нормали ~~к~~ ~~пов~~ к пов Φ в т. M

$$\Delta S \approx |\vec{N}|\,du\,dv = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$$

Естест-но считать, что

$$S(\Phi) \approx \sum_{\Phi} \Delta S \approx \sum_{G} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv \text{ —}$$

— $\iint$ая сумма для $\iint\limits_G \sqrt{\ }\,du\,dv$

Тогда в lim-е (при diam $\to 0$) $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow S(\Phi) = \iint\limits_G \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$$

Зам $A^2+B^2+C^2 = \vec{N}^2 = (\vec{N}, \vec{N}) =$

$$= \Big(\big[\underset{\vec{a}_1}{\underset{\shortparallel}{\vec{r}_u}}, \underset{\vec{a}_2}{\underset{\shortparallel}{\vec{r}_v}}\big], \underbrace{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}_{=\vec{a}_3}\Big) = \big([\vec{a}_1, \vec{a}_2], \vec{a}_3\big) = \big(\vec{a}_1, [\vec{a}_2, \vec{a}_3]\big) =$$

$$= \big(\vec{r}_u, [\underset{a}{\vec{r}_v}, [\underset{b}{\vec{r}_u}, \underset{c}{\vec{r}_v}]]\big) = \big(\vec{r}_u, \underset{b}{\vec{r}_u}(\underset{a}{\vec{r}_v}, \underset{c}{\vec{r}_v}) - \underset{c}{\vec{r}_v}(\underset{a}{\vec{r}_v}, \underset{b}{\vec{r}_u})\big) =$$

$$= \underbrace{\vec{r}_u^{\,2}}_{E}\,\underbrace{\vec{r}_v^{\,2}}_{G} - \underbrace{(\vec{r}_u, \vec{r}_v)}_{F}{}^2 \equiv EG - F^2$$

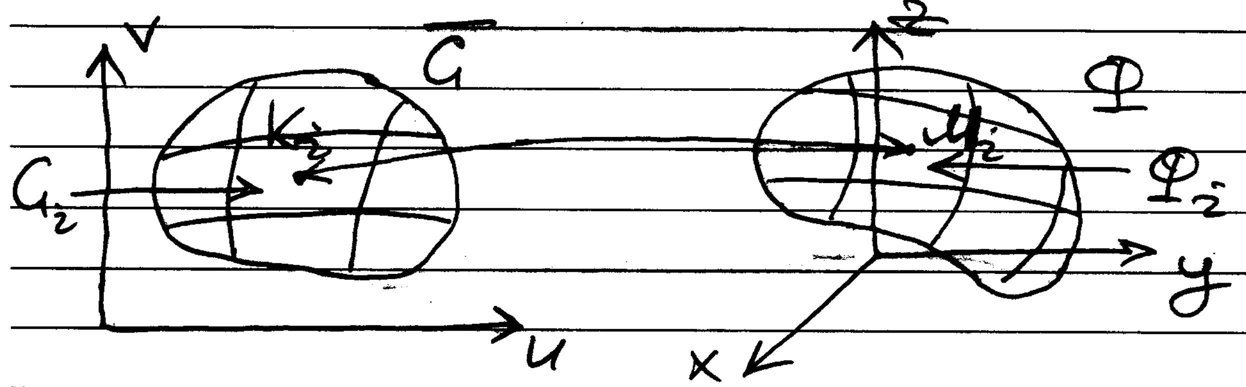
$E=(\vec{r}_u,\vec{r}_u)=\varphi_u^2+\psi_u^2+\chi_u^2,\ G,\ F=-u-$

$\Rightarrow S(\Phi)=\iint\limits_G\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$

§2 Поверхн-ые $\iint$-лы I-го рода

Пусть Φ – рег-ая пов-ть:

$\begin{cases} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v) \\ z=\chi(u,v)\end{cases}$ $(u,v)\in\overline{G}$ и пусть $f(M)=$
$=f(x,y,z): D_f\supset\Phi$



$\overline{G}=\overline{G}_1\cup\ldots\cup\overline{G}_n,\ \overline{G}_i$ – замкн ~~кв-ые~~ квадрлые обл-ти без общих внутр т-к

$T[G]\equiv\{\overline{G}_i\,|\,i=\overline{1,n}\}\mapsto\tilde{T}[\Phi]\equiv\{\Phi_i\,|\,i=\overline{1,n}\}$

$\Phi=\Phi_1\cup\ldots\cup\Phi_n,\ \Phi_i$ – част-ые пов-ти

Обозн $\Delta S_i=S(\Phi_i),\ \Delta_i=diam\,\Phi_i,$

$\tilde{\Delta}(\tilde{T})=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta_i$ – диам разб $\tilde{T}$

$I(\tilde{T}, M_i) \equiv \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$ — $\iint$-ая Σ-а ф-ии f

Опр $\lim\limits_{\tilde{\Delta}\to 0} I(\tilde{T}, M_i) \equiv \iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)\,ds$

— пов-ый $\iint$ал I-го рода от ф-ии f по пов-ти Φ

Зад-ие. Дать опр $\lim\limits_{\tilde{\Delta}\to 0} I(\tilde{T}, M_i)$ в "ε-δ"

Теор 1 (о сведении $\iint\limits_{\Phi}$ к $\iint\limits_{G}$) Пусть:

1) Φ - регул-ая пов-ть

2) $f(x,y,z)$ непр на Φ

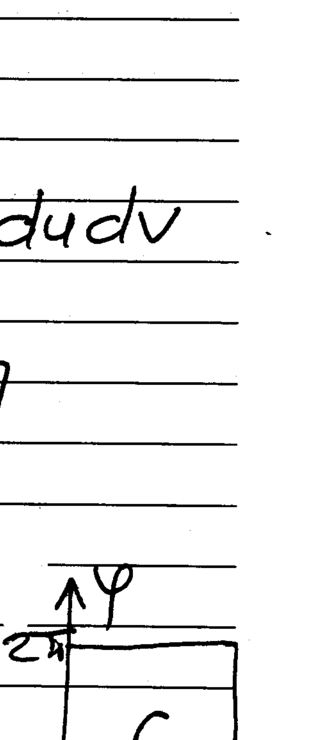
$\Rightarrow \exists \iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)\,ds =$

$= \iint\limits_{G} f(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$

Нап, что A, B, C — к-ты $[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$

Δ Без док-ва

(1) Пусть Φ - сфера



$S(\Phi) = \iint\limits_{\Phi} ds = \iint\limits_{G}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,d\theta\,d\varphi =$

$= \iint\limits_{G} R^2 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi = R^2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\varphi = 4\pi R^2$