Лекция 22

Будем рассм-ать радиус-вектор $\vec{r} \equiv \overrightarrow{OM}$ как вектор-ф-цию арг-ов u и v:

$$\vec{r} \equiv \overrightarrow{OM} = \{\underset{x}{\varphi(u,v)}, \underset{y}{\psi(u,v)}, \underset{z}{\chi(u,v)}\} = \vec{r}(u,v),$$

$(u,v) \in G$

парам-ое ур-ие пов-ти в векторной форме

$$\Delta\vec{r}_1 \equiv \vec{r}_1 - \vec{r} \equiv \Delta_u \vec{r}$$

по опр-ию произв-ой вектор ф-ии

$$\Rightarrow \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta_u \vec{r}}{\Delta u} = \vec{r}_u = \{\varphi_u, \psi_u, \chi_u\}$$

это мы доказывали (по крайней мере я приводил утв-ие о покоорд-ом диф-ии вектор-ф-ии)

Утв [~~Если $\vec{r}_u \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{r}_u$~~] $\vec{r}_u \parallel \tau_1$ – касат-му вектору к линии 1

Ан-но [~~$\vec{r}_v \neq \vec{0} \Rightarrow$~~] $\vec{r}_v$ – касат-ый вектор к линии 2

Введём в рассм-ие

$\overrightarrow{\Delta S} \equiv [\Delta\vec{r}_1, \Delta\vec{r}_2]$ – вектор площади ($|\Delta S|$ – площадь ▱, постр-го на $\Delta\vec{r}_1$ и $\Delta\vec{r}_2$)

$$\begin{cases}\Delta\vec{r}_1 \approx d\vec{r}_1 = \vec{r}_u\cdot du + \vec{r}_v\cdot 0\\ \Delta\vec{r}_2 \approx d\vec{r}_2 = \vec{r}_u\cdot 0 + \vec{r}_v\cdot dv\end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta\vec{S} \approx \underset{\uparrow}{d\vec{S}} \equiv [d\vec{r}_1, d\vec{r}_2] = [\vec{r}_u du, \vec{r}_v dv] =$$

векторный элемент площади пов-ти S

$$= \underbrace{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}_{\equiv \vec{N}}\, du\, dv$$

Из рисунка также видно, что если $[\vec{r}_u, \vec{r}_v] \neq \vec{\theta}$, то $\vec{N}$ — вектор нормали к пов-ти S в т. M ($\equiv$ вектор нормали к касат-ой пл-ти ~~S в т. M~~ к пов-ти S в т. M)

$$\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi_u & \psi_u & \chi_u \\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix}}_{A}\cdot\vec{i} + \underbrace{\begin{vmatrix} \chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v \end{vmatrix}}_{B}\cdot\vec{j} + \underbrace{\begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix}}_{C}\cdot\vec{k}$$

Зам. В случае простой замкнутой гладкой пов-ти (т.е. пов-ти, явл-ся границей некоторой области $T \subset E^3$) спр-во утв-ие:

$$\begin{vmatrix} \varphi & \psi & \chi \\ \varphi_u & \psi_u & \chi_u \\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v \end{vmatrix} \gtrless 0 \quad \forall (u,v) \in \overline{G} \;\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\; \{A, B, C\}$$ — вектор внешн (внутр) нормали

$$ds \equiv |d\vec{S}| = \vec{N}\,du\,dv = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$$

скалярный эл-нт площади пов-ти S (или просто — эл-нт площади)

Естественно считать, что

$$\Pi\lambda(S) \approx \sum_{S} \Delta S \approx \sum_{G} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$$

При $\Delta S \to 0 \Rightarrow \sum \to \iint$ ← что такое $\iint$ по S мы ещё не знаем (опр-им позже в §2), зато знаем, что такое $\iint$ по G

Опр Площадью простой гладкой пов-ти (в т.ч. почти гладкой) S наз-ся число, равное

$$\iint\limits_{G} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv \equiv \Pi\lambda(S)$$

ф-ия u и v

Опр Площадь ~~простой~~ кусочно-гладкой пов-ти S равна сумме площадей простых гладких (в т.ч. почти гладких) пов-тей, из кот-х она состоит

Зам 1 Можно док-ть, что так опр-ая площадь пов-ти S обладает всеми св-ми площадей ~~пов-ей~~ плоских фигур, и что её величина не зависит от выбора с-мы координат (последнее спр-во и в отношении длин плоских кривых)

Зам 2 Теперь мы видим, что усл-ие 3) из опр-я простой гладкой пов-ти:

$$\mathrm{rang}\begin{pmatrix}\varphi_u & \psi_u & \chi_u\\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v\end{pmatrix} = 2 \iff |\vec N| = \sqrt{A^2+B^2+C^2} =$$

$= \left|[\vec r_u, \vec r_v]\right| \neq \vec\theta \iff \vec r_u, \vec r_v$ — не коллин-ны

Т.е. условие 3) гладкости пов-ти — это дост-ое усл-ие $\exists$-ия вектора нормали (а значит и касат-ой пл-ти во внутр-х точках пов-ти)

Зам 3 $A^2+B^2+C^2 = \vec N^2 = (\vec N, \vec N) =$

$$= \Big([\overset{a_1}{\vec r_u}, \overset{a_2}{\vec r_v}], \overset{a_3}{\overbrace{[\vec r_u, \vec r_v]}} \Big) \underset{\uparrow}{=} \Big(\overset{a}{\vec r_u}, [\overset{b}{\vec r_v}, \overset{c}{[\vec r_u, \vec r_v]}]\Big) =$$

как смешанное пр-ие

$$= \Big(\vec r_u, \underset{b}{\vec r_u}(\underset{a}{\vec r_v}, \underset{c}{\vec r_v}) - \underset{c}{\vec r_v}(\underset{a}{\vec r_v}, \underset{b}{\vec r_u})\Big) =$$

$$= \vec r_u^{\,2}\vec r_v^{\,2} - (\vec r_u, \vec r_v)^2 \equiv EG - F^2,$$

где $E(u,v) \equiv \vec r_u^{\,2} = \varphi_u^2 + \psi_u^2 + \chi_u^2$

$G(u,v) \equiv \vec r_v^{\,2} = \varphi_v^2 + \psi_v^2 + \chi_v^2$

$F(u,v) \equiv \vec r_u \vec r = \varphi_u\varphi_v + \psi_u\psi_v + \chi_u\chi_v$

$$\Rightarrow \text{Пл}(S) = \iint\limits_G \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

Зам 4 Понятие площади пов-ти можно обобщить и на более сложные пов-ти, т.е. не явл-ся ~~простыми~~ кусочно-гладкими пов-ми. Пов-ти, для кот-х опр-на площадь, наз-ся квадрируемыми (т.о., $\forall$ кусочно-гладкая пов-ть квадрируема)

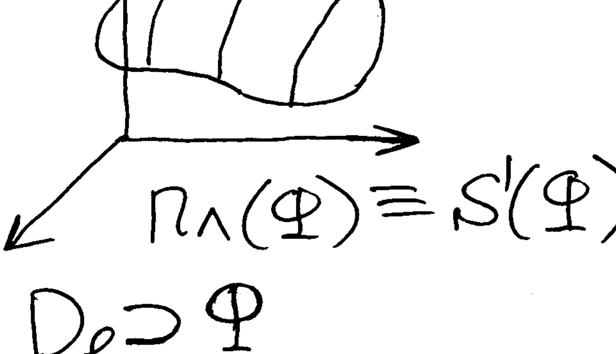
Доп-но: в будущем переименовать гладкие и ~~кл~~ почти гладкие пов-ти соответственно в регулярные и почти рег-ые (то же и для кривых)

(§2) Поверхностные $\int$лы I-го рода

Всюду до конца этой главы речь будет идти о простых гладких и почти гладких пов-ях, поэтому слова простая и почти для краткости будем пропускать

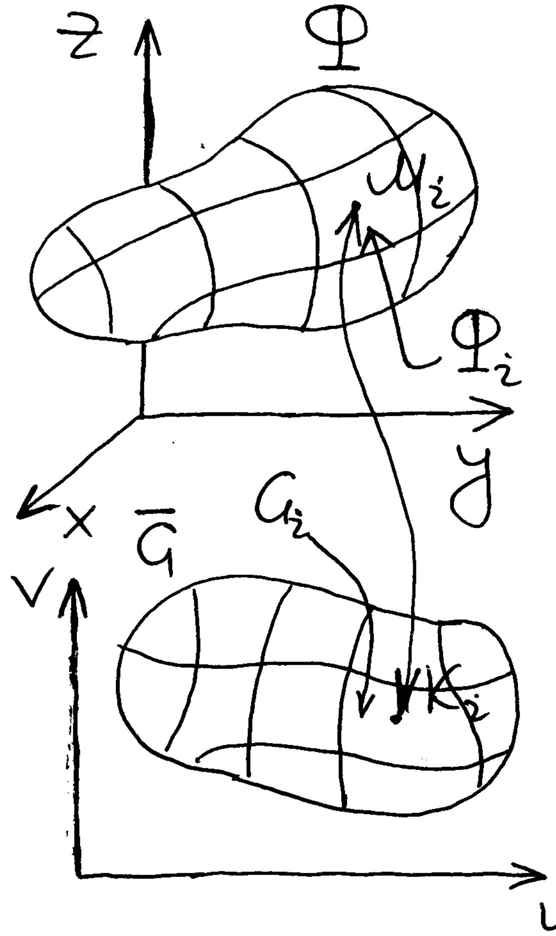
Пусть Φ - гладкая пов-ть:

$$\begin{cases} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v), \quad (u,v)\in\overline{G} \\ z=\chi(u,v) \qquad (*) \end{cases}$$



$\Pi\Lambda(\Phi)\equiv S(\Phi)$

Пусть $f(M)\equiv f(x,y,z)$: $D_f\supset\Phi$



Разобьём $\bar G$ на n частей G_i кусочно-гладкими кривыми (частичные фигуры)

Можно пок-ть, что такому разбиению $\bar G$ ~~к~~ отвечает разбиение поверхности Φ на n частей Φ_i кусочно-гладкими (пространств-ми) кривыми (и наоборот)

$\{G_i \mid i=\overline{1,n}\} \equiv T[\bar G]$ – разбиение обл-ти $\bar G$

$\{\Phi_i \mid i=\overline{1,n}\} \equiv \tilde T[\Phi]$ – разбиение пов-ти Φ

$$T[\bar G] \longleftrightarrow \tilde T[\Phi]$$

$\Delta S_i \equiv S(\Phi_i)$ – **площадь** i-й частичной пов-ти

$\Delta_i \equiv \operatorname{diam} \Phi_i$ $\qquad \tilde\Delta = \tilde\Delta(\tilde T)$

$\tilde\Delta \equiv \max\limits_{1\le i\le n} \Delta_i$ – диаметр $\tilde T[\Phi]$

$M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ – i-ая пром-я точка $\Big\}$ доп-но

$\{M_1, \dots, M_n\} \equiv \{M_i\}$

$I(\tilde T, M_i) \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$ – $\int$ая Σ-а для ф-ии f

Опр. Если $\exists \lim\limits_{\tilde{\Delta}\to 0} I(\tilde{T}, M_i)$, то он наз-ся пов-ым $\iint$ом I-го рода от ф-ии f по пов-ти Φ

Обозн $\iint\limits_{\Phi} f(M)\,d\bar{\bar{s}}$ или $\iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)\,d\bar{\bar{s}}$

Зад-ие. Дать опр-ие (в ε-δ) $\lim\limits_{\tilde{\Delta}\to 0} I(\tilde{T}, M_i)$

Теор 1 (о сведении пов-го $\iint$ла I-го рода к двойному) Пусть:

1) Φ - гладкая пов-ть, опред-ая (*)

2) $f(x,y,z)$ непр-на на пов-ти Φ

$$\Rightarrow \exists \iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)\,ds = \iint\limits_{G} f(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \times$$

$$\times \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv,$$

где $A(u,v) = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix}$, $B =$ —"— (см §1)

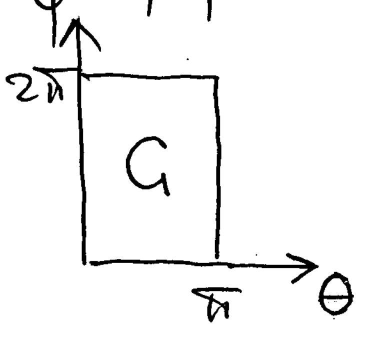
Δ Без док-ва (доп-но - см. Ильин, Позняк)

Зам В случае кусочно-гладкой пов-ти Φ

$\iint\limits_{\Phi} = \iint\limits_{\Phi_1} + \dots + \iint\limits_{\Phi_n}$, где Φ_i - гладкие пов-ти, составляющие пов-ть Φ

① Найти площадь сферы

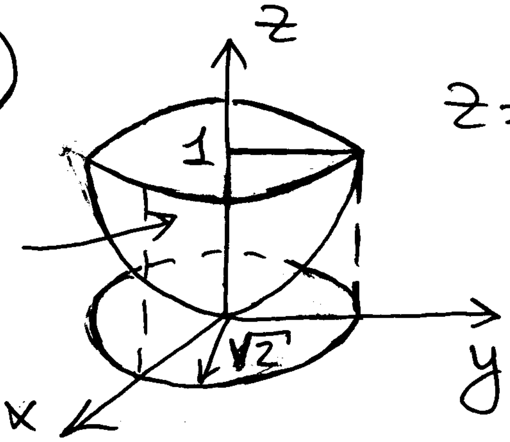
$$\underset{\text{сфера}}{S(\Phi)} = \iint_{\Phi} ds = \iint_{G} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, d\theta\, d\varphi \underset{\text{см пример 2)}}{=}$$



$$= \iint_{G} R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 4\pi R^2$$

②



$$z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

$$\iint_{\Phi} (x+y)\, ds = ?$$

$x = u$, $y = v$ — пар-ры

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_x & y_x & z_x \\ x_y & y_y & z_y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_x & 1 \\ 0 & 1 & z_y & 0 \end{pmatrix}$$

A, C, B

$C = 1$, $A = -z_x$, $B = -z_y$

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2} = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+x^2+y^2}$$

Формальный вывод:

~~пусть~~ обозначим через $dxdy$, ~~от~~ проекцию эл-та площади ds на пл-ть XY:

$\text{Пр}_{XY}\, ds \equiv dxdy$ и ан-но:

$\text{Пр}_{YZ}\, ds \equiv dydz$, $\text{Пр}_{ZX}\, ds \equiv dzdx$

Эл-нт пл-ди ds формально считается плоским $\Rightarrow$ (как изв-но ещё из элем-го курса геом-ии)

$$ds = \sqrt{(dx\,dy)^2 + (dydz)^2 + (dzdx)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, \underbrace{dxdy}_{\text{считается пол-м}} = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy$$

Т.о. $\displaystyle\iint_{\Phi} (x+y)\, ds = \iint_{G} (x+y)\sqrt{1+x^2+y^2}\, dxdy =$

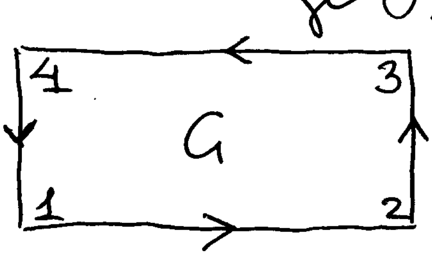
$$= \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_0^{2\pi} \rho(\cos\varphi + \sin\varphi)\sqrt{1+\rho^2}\, \rho \cancel{d\rho}\, d\varphi = 0$$

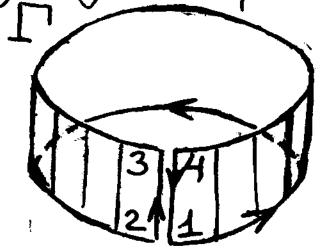
§3 Поверхностные $\int$лы II-го рода

Вначале общие слова про график ф-ии двух арг-ов: нижняя и верхняя стороны, про сферу: внутренняя и внешняя стороны

+Пояснения для цилиндра и листа Мёбиуса на языке нормалей **22.10**

① Цилиндр — двусторонняя пов-ть

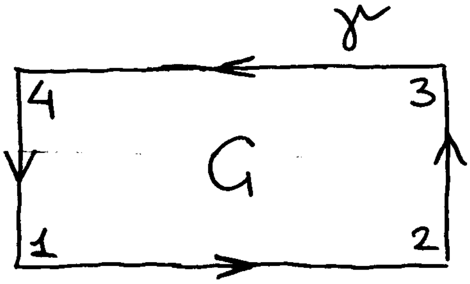


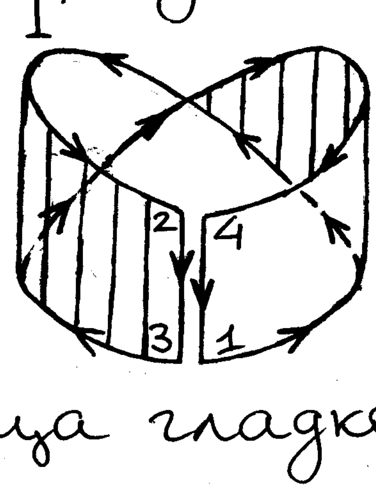


$(2\to3) = -(4\to1) = (1\to4)$

Характерный признак двустор-ей пов-ти: при обходе гр-цы γ обл-ти G каждый участок гр-цы Γ пов-ти Φ либо обходится только один раз, либо (если он обходится более одного раза) каждый следующий его обход производится в противоположном направлении (по сравнению с предыдущим)

② Лист Мёбиуса — односторонняя пов-ть





$(2\to3) = +(4\to1)$

Доп утв ~~Есть~~ Граница гладкой пов-ти — совокупность (непересек-ся) замкнутых кусочно-гладких кривых

Опр Если при обходе границы γ области G никакая часть (положит-ой длины) границы Γ пов-ти Φ не обходится дважды в одном напр-ии (подряд), то Φ — двусторонняя (гладкая) поверх-ть. В противном случае — односторонняя пов-ть ∠Зам (на стр 12)

Пусть Φ — кусочно-гладкая пов-ть:

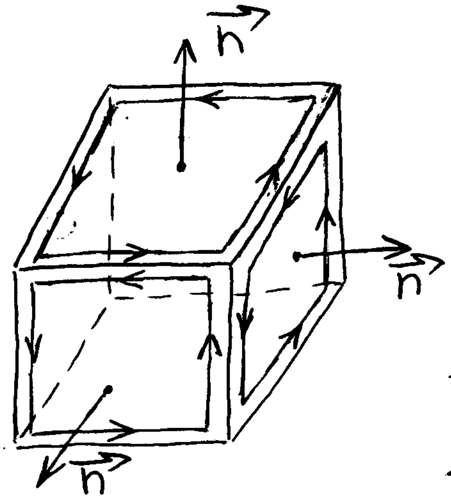
$$\Phi = \bigcup_{i=1}^{n} \Phi_i$$ ← части пов-ти Φ (гладкие пов-ти)

Совокупность напр-ий обхода частей Φ_i ≡ напр-ие обхода пов-ти Φ (всего 2^n вариантов напр-ий обхода)

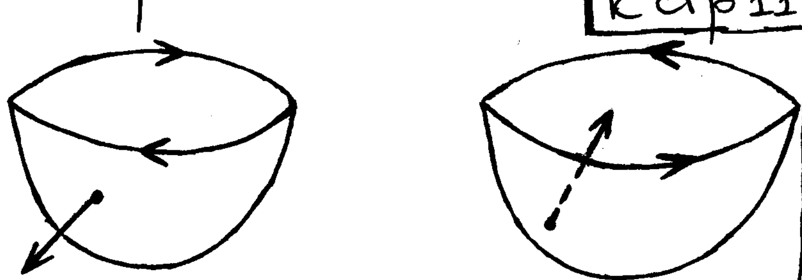
Опр Кусочно-гладкая пов-ть Φ наз-ся двусторонней, если:

1) каждая из (составляющих её гладких) частей Φ_i — двусторонняя пов-ть

2) $\exists$ такой выбор напр-ия обхода её границы, при котором общие части границ Φ_i обходятся в противоположных напр-иях (В противном случае пов-ть наз-ся одностор-ей)

③ 

Считается, что направление обхода выбирает ту сторону пов-ти, которая при обходе в данном направлении остаётся слева (этот выбор можно также указать с помощью вектора нормали)



Вст-ка к стр 11: Зам П.о., одна и та же простая кривая не может служить границей двух "разносторонних" пов-ей

Зам 1 П.о., выбор стороны пов-ти можно обозначить 1) с помощью вектора нормали или 2) с помощью указания направл-я обхода её границы. При этом направление обхода выделяет ту сторону пов-ти, которая при обходе в данном направлении остаётся слева

Зам 2 Двустор-яя пов-ть наз-ся также ориентируемой, выбор стороны — ориентированием пов-ти, пов-ть с выбранной стороной — ориентир-ой пов-тью