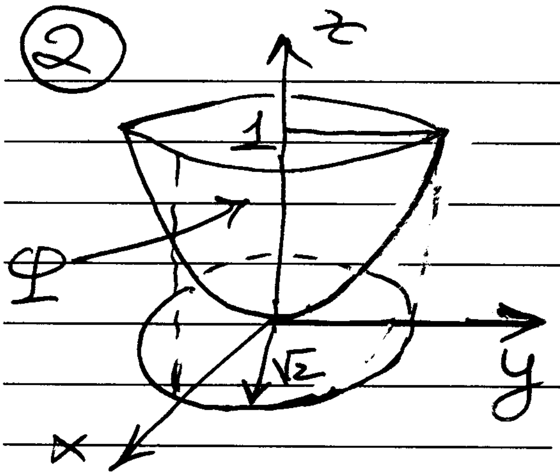
2

22.1



$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $0\le z\le 1$

$\iint\limits_{\Phi}(x+y)\,dS=?$

К-ты в-ра верхн нормали к гр-ку ф-ии

$\begin{cases} x=u\\ y=v\\ z=z(u,v)\end{cases}$ $\vec{r}=\{u,v,z(u,v)\}=\{x,y,z(x,y)\}$

$[\vec{r}_x,\vec{r}_y]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & z_x\\ 0 & 1 & z_y\end{vmatrix}=\underbrace{-z_x}_{A}\vec{i}\underbrace{-z_y}_{B}\vec{j}+\underbrace{1}_{C}\cdot\vec{k}$

$\Rightarrow\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+x^2+y^2}$

~~ф-ла для~~ случая явного задания Φ

Формальный вывод: $Пр_{XY}\,dS\equiv dxdy$, $Пр_{YZ}\,dS\equiv dydz$, $Пр_{ZX}\,dS\equiv dzdx$

$\Rightarrow dS=\sqrt{(dxdy)^2+(dydz)^2+(dzdx)^2}=$

$=\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,\underbrace{dxdy}_{ст\text{-}ая>0}=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

Т.о. $\iint\limits_{\Phi}(x+y)\,dS=\iint\limits_{G}(x+y)\sqrt{1+x^2+y^2}\,\overbrace{dxdy}^{\rho\, d\rho\, d\varphi}=$

$=\int\limits_0^{\sqrt{2}}d\rho\int\limits_0^{2\pi}\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)\sqrt{1+\rho^2}\,\rho\, d\varphi=0$

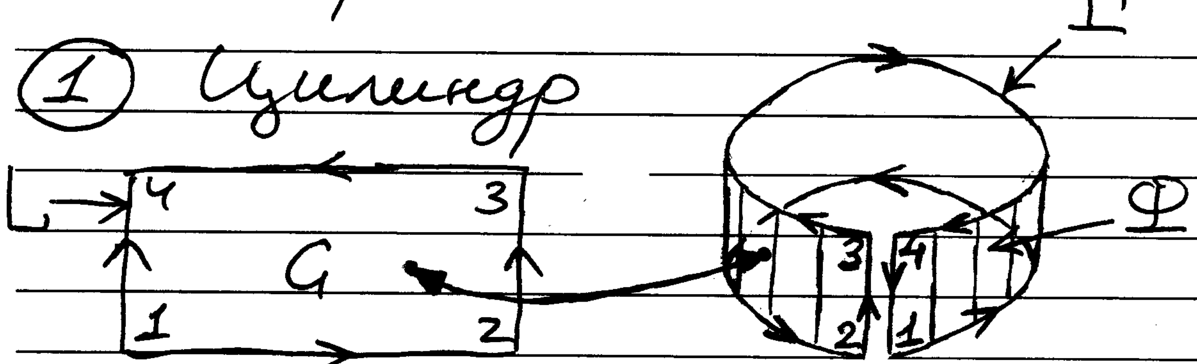
§3 Поверхн-ые ф-лы II-го рода

Пов-ти бывают одностор-ми и двустор-ми (напр: верхн-нижн, внутр-внешн)

Пусть $\Phi: \begin{cases} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v) \\ z=\chi(u,v) \end{cases} \quad (u,v)\in\overline{G}$

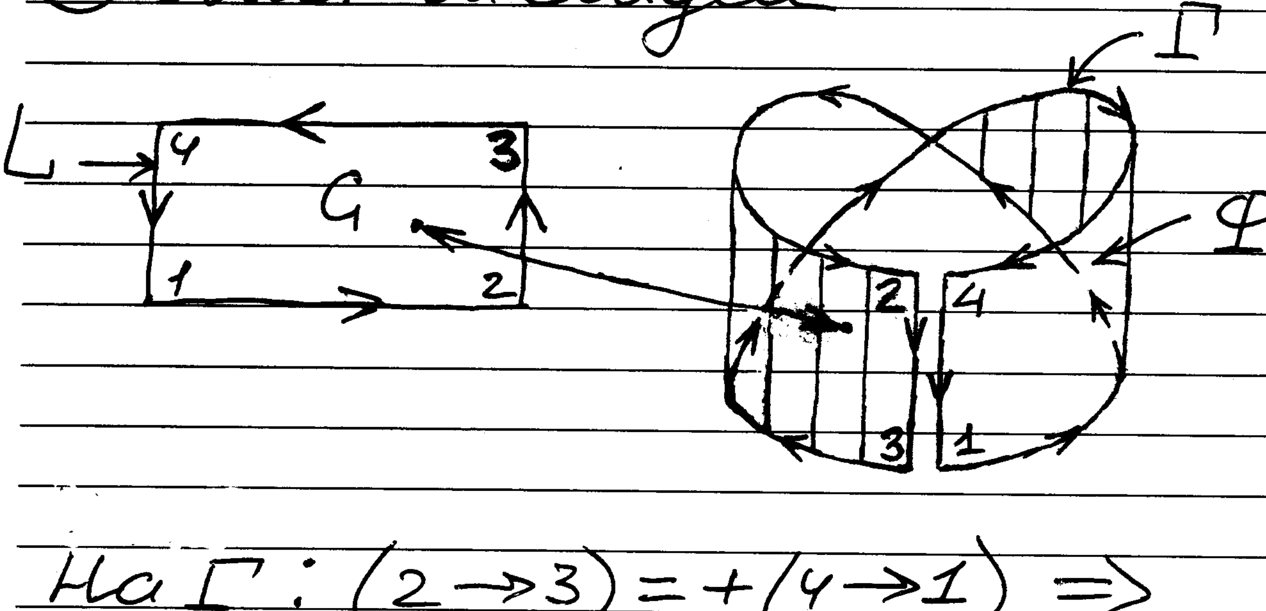
– почти простая пов-ть

① Цилиндр



На Г: $(2\to 3) = -(4\to 1) \Rightarrow$ двуст-яя пов-ть

② Лист Мёбиуса

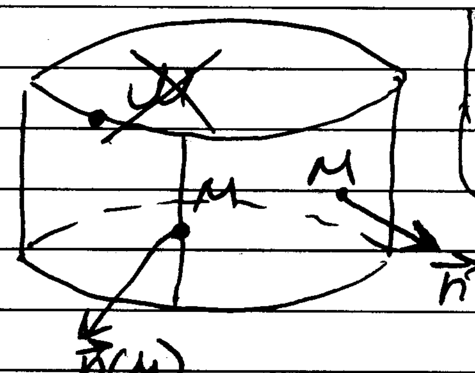


На Г: $(2\to 3) = +(4\to 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ одност-яя пов-ть

Опр Если при обходе гр-цы L_1 обл-ти G никакая часть (пол-ой длины) гр-цы Γ пов-ти Φ не обходится дважды подряд в одном напр-ии, ~~то~~ Φ — двусторонняя пов-ть. В противном случае Φ — одностор-яя пов-ть

Пусть Φ — регул-ая пов-ть



M — краевая т. рег-ой пов-ти Φ $\equiv$ M — гр-ая т. пов Φ при $\forall$ рег-ой парам-ции этой пов-ти ("истинно гр-ая")

Край пов-ти $\equiv$ мн-во всех краевых т-к

Обозн $\tilde{\Phi} \equiv \Phi \setminus$ края

$\forall$ т. $M \in \tilde{\Phi} \Rightarrow \exists$ касат-ая пл-ть $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \infty$ много вект-в нормали

(один из них: $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$)

Опр Вектор-ф-я $\vec{n}(M)$, кот $\forall$ т. $M \in \tilde{\Phi} \mapsto$

$\mapsto$ один из двух единичных в-в нормали к пов-ти Φ наз (вект-м) полем нормалей

(всего $\exists \infty$ много таких полей)

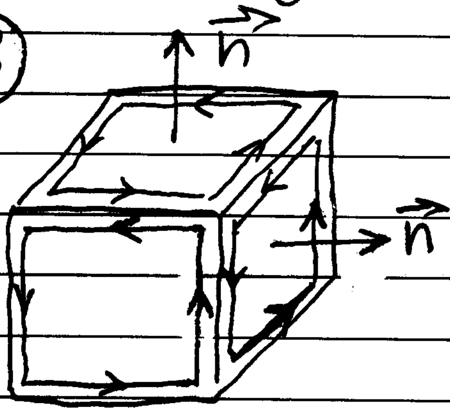
Т.о. $|\vec{n}(M)| = 1 \Rightarrow \vec{n}(M) = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 22.4

Утв $\forall$ двуст-ей рег-ой пов-ти Φ $\exists$ два поля норм-ей: $+\vec{n}(M)$ и $-\vec{n}(M)$, непр-х на Φ ~~поле норм-й (...) непр-ое~~ (разр-х ∞ много)

~~Зам Всего $\exists$ два непр поля норм-й: $+\vec{n}(M)$ и $-\vec{n}(M)$ (разр-х ∞ много)~~

Рассм случай кусочно-рег-й пов-ти

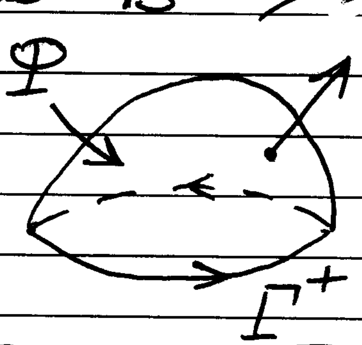
(3)



Куб – двустор-яя пов-ть, т.к. общие участки гр-ц обх-ся в против-ых напр-х

Зам Пов-ть с выбранной стороной $\equiv$ $\equiv$ ориентиров-ая пов-ть

Пусть Φ – кусочно-рег-ая ориент-ая пов-ть $\Rightarrow$ выбрано непр-ое на Φ поле нормалей (сторона):



$\vec{n}(M) = \{\cos\alpha(M), \cos\beta(M), \cos\gamma(M)\}$

Зам Выбор стороны ~~фикс-ет~~ задаёт пол-ое напр обхода гр-цы: Φ остаётся слева

И пусть $\vec{F}(M) = \{P(M), Q(M), R(M)\} : D_{\vec{F}} \supset \Phi$

Опр $I = \iint\limits_{\Phi} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds \equiv$ 22.5

пов-ый ∬ал I-го рода

$\equiv \iint\limits_{\Phi} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$

от в-р ф-ции $\vec F(M)$

— (общий) пов-ый ∬ал II-го рода по выбр-ой стороне пов-ти Φ ~~от в-р ф-ции $\vec F(M)$~~

Зам 1 $I = \iint\limits_{\Phi} (\vec F, \vec n)\,dS$

Зам 2 При смене стороны пов-ти

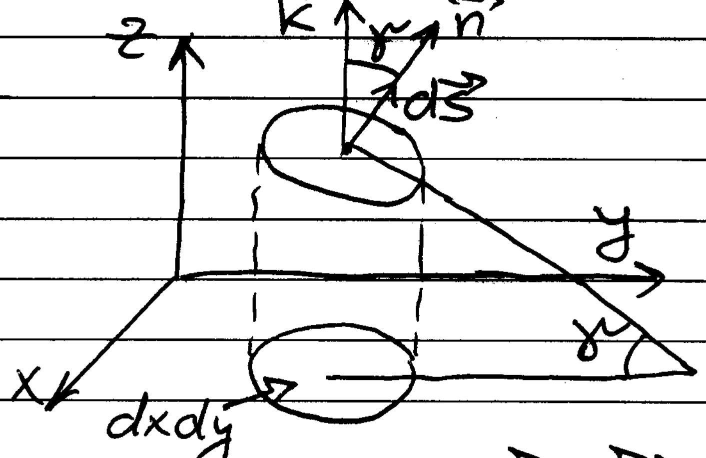
$\alpha \mapsto \alpha \pm \pi$, $\beta \mapsto \beta \pm \pi$, $\gamma \mapsto \gamma \pm \pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha \mapsto -\cos\alpha$, $\cos\beta \mapsto -\cos\beta$, $\cos\gamma \mapsto -\cos\gamma$,

т.е. $\vec n(M) \mapsto -\vec n(M) \Rightarrow \iint\limits_{\Phi} \mapsto -\iint\limits_{\Phi}$

(в отличие от пов-го ∬ла I-го рода)

Геом смысл обозн-ий $dydz$ и т.д.



$d\vec S \equiv \vec n\,dS =$ (1)

$= \{dS\cos\alpha, dS\cos\beta, dS\cos\gamma\}$

$\quad\;\; \| \qquad\quad \| \qquad\quad \|$

$\quad\; dS_x \qquad dS_y \qquad dS_z$

— вект-й эл-нт пл-ди на Φ

Т.к. $\gamma = \angle(d\vec S, \vec k) = \angle(dS, XOY)$, то

$dS_z = \cos\gamma \cdot dS = dxdy$ — ориент-ый (со знаком) эл-нт пл-ди на пл-ти XOY

Ан-но: $dS_x = \cos\alpha\, dS = dydz$

$dS_y = \cos\beta\, dS = dzdx$

Т.о. $d\vec{S} = \{dydz, dzdx, dxdy\}$ (2)

$\Rightarrow \iint\limits_{\Phi} (\vec{F}, \vec{n})\, dS \overset{(1)}{=} \iint\limits_{\Phi} (\vec{F}, d\vec{S}) \overset{(2)}{=}$

$= \iint\limits_{\Phi} P dydz + Q dzdx + R dxdy$

Физ смысл Пусть $\vec{v}(M)$ – поле скоростей потока жидкости $\Rightarrow$

$\Rightarrow \iint\limits_{\Phi} (\vec{v}, \vec{n})\, dS$ – объём жидкости, прох-ей через пов-ть Φ в напр-ии $\vec{n}(M)$ в ед-цу времени (поток в-го поля $\vec{v}(M)$) – см. Будак, Фомин начало лекции 23

Теор 2 (о св-ии $\iint\limits_{\Phi} (\vec{F} d\vec{S})$ к $\iint\limits_{G}$) Пусть:

1) Φ – рег-ая ориент-ая пов-ть

2) P, Q, R непр на Φ

3) $\vec{N}(M) = \vec{N}(u,v) \equiv [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ – в-р нормали на выбр-ой стороне Φ