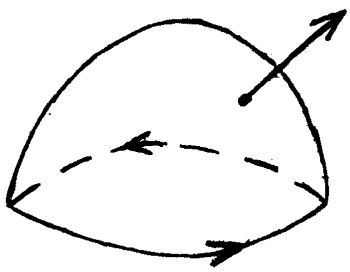
Лекция 23

Пусть Φ – гладкая ориентированная пов-ть



$\vec{n}(M)$ – непр-ая вектор ф-я (поле нормалей)

Пусть $|\vec{n}(M)| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{n}(M) = \{\cos\alpha(M), \cos\beta(M), \cos\gamma(M)\}$

Дополн-но: "открытая" пов-ть (без гр-цы)

$\forall$ т. $M \in \tilde{\Phi}$ сущ-ет кас-ая пл-ть к пов-ти Φ и два единичных вектора нормали (к этой пов-ти): $\pm\vec{n}$

Пусть $\vec{n} = \vec{n}(M)$ – один из возможных единичных векторов нормали (любой) в т. M, выбранный произв-ым (случайным) образом

Ф-ия $\vec{n}(M)$ – векторное поле нормалей

Утв $\forall$ кусочно-гладкой пов-ти Φ сущ-ет векторное поле нормалей $\vec{n}(M)$, непрер-ое в каждой т. $M \in \tilde{\Phi}$

M – краевая т-ка пов-ти $\Phi \equiv M$ – граничная т-ка пов-ти Φ при $\forall$ параметризации этой пов-ти ("истинно гр-ая")

Множ-во всех краевых точек $\equiv$

$\equiv$ край пов-ти

Обозн $\tilde{\tilde{\Phi}} \equiv \Phi \setminus$ края

Утв $\forall$ двусторонней кусочно-гладкой пов-ти Φ сущ-ет векторное поле нормалей $\vec{n}(M)$, непр-ое в к-ой т. $M \in \tilde{\tilde{\Phi}}$

(Под гр-ей (краем) кусочно-гл-ой пов-ти понимается объедин-ие гр-ц (краёв) всех составл-их её частей)

Зам Всего $\exists$-ют два непр-ых поля нормалей: $+\vec{n}(M)$ и $-\vec{n}(M)$

И пусть вектор ф-я $\vec{F}(M) = \{P(M), Q(M), R(M)\}$: $D(\vec{F}) \supset \Phi$

Опр $I_1 = \iint\limits_{\Phi} P(M)\cos\alpha(M)\,ds$, $\iint\limits_{\Phi}$ первого рода от $P(M)\cos\alpha(M)$

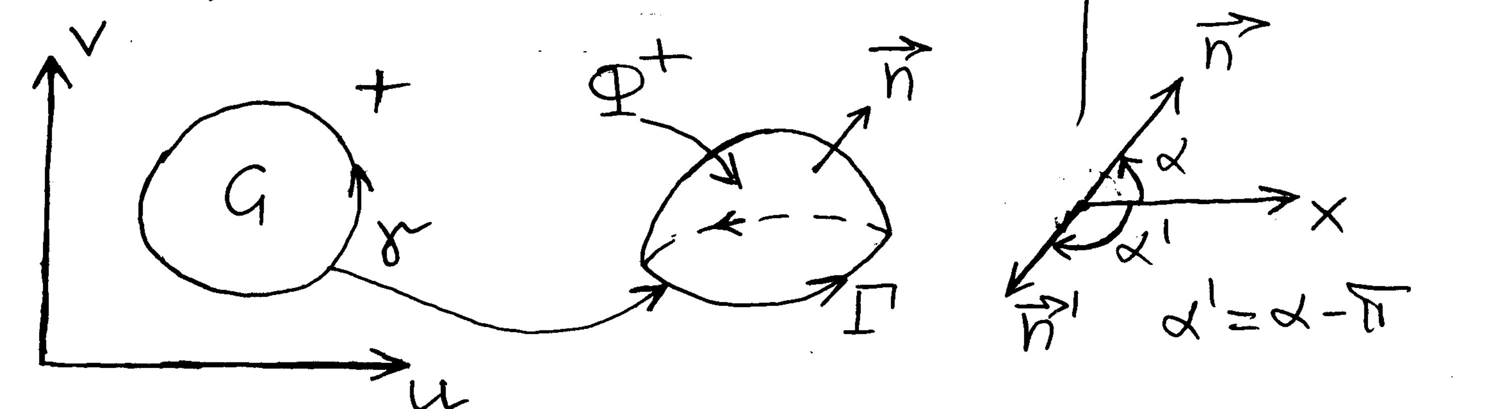
$$I_2 = \iint\limits_{\Phi} Q\cos\beta\, ds,\quad I_3 = \iint\limits_{\Phi} R\cos\gamma\, ds$$

– поверх-ые $\iint$лы II-го рода по выбранной стороне пов-ти Φ от ф-ий P, Q и R соотв-но

Зам 1 Т.о., пов-ые $\iint$лы II-го рода мо-

гут быть трёх видов, ~~и опр-ся~~ каж- $\boxed{23.3}$
дый из кот-ых опр-ся через соотв-щий по-
в-ный $\iint$-л I-го рода: пов-ный II-го рода
1-го вида от ф-ии $P(M)$ = пов-му $\iint$лу
от $\iint$лу I-го рода **от ф-ии $P(M)$** $\times$
$\times \cos\alpha(M)$ и т. д.

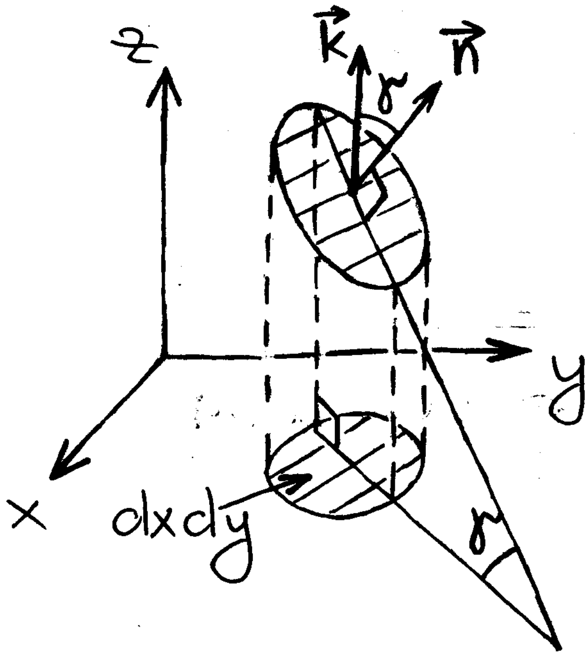
Зам 2 Из опр-ия $\Rightarrow$ поверхн-ный $\iint$ал II-го рода (в отличие от пов-го $\iint$ла I-го рода) зависит от **выбора** стороны пов-ти: при изменении ориентации пов-ти ~~пов-ти~~ вектор нормали меняется на противоположный, в результате чего **все** три **на**правл-их cos-а в $\iint$ах, а вместе с ними и сами эти $\iint$лы, меняют знак $(\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$, — и — $)$



$$\iint\limits_{\Phi^+} P\cos\alpha\, ds = -\iint\limits_{\Phi^-} P\cos\alpha\, ds$$

новое α = старое $\alpha \pm \pi$

(по умолчанию под Φ^+ поним-ся та сторона, кот отв-т "+" обходу γ



$dxdy \equiv dS \cdot \cos\gamma$

ориентир-ый элемент площади (со знаком) на пл-ти XOY:

$\gamma < \pi/2 \Rightarrow dxdy > 0$

$= \pi/2 \Rightarrow \quad = 0$

$< \pi/2 \Rightarrow \quad < 0$

$$\Rightarrow \iint\limits_{\Phi} R\cos\gamma\, dS \equiv \iint\limits_{\Phi} R\, dxdy$$

обозначение! ориентир-ый! эл-нт площади

Ан-но: $dS \cdot \cos\alpha = dydz$, $dS \cdot \cos\beta = dzdx$

(Выражения для $\iint$ов I_1 и I_2 запишите самост-но)

Опр $I \equiv I_1 + I_2 + I_3 = \iint\limits_{\Phi} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS \equiv \iint\limits_{\Phi} P dydz + Q dzdx + R dxdy$

— общий пов-ый $\iint$ал II-го рода от вектор-ф-ии $\vec{F}(M)$

Зам 1 Пов-ые $\iint$ы от P, Q и R всегда можно рассм-ать как част-ные случаи общего $\iint$ла от ф-ии $\vec{F}$, у которой все компоненты кроме одной равны нулю. Напр,

$$\iint P dydz = \iint P dydz + 0 \cdot dzdx + 0 \cdot dxdy$$

В связи с этим мы далее по умолчанию под поверхн-ми $\iint$ми II-го рода всегда будем подразум-ть **общие** поверх-ые $\iint$лы II-го рода, в кот-х, быть может, ~~одна~~ нек-ые из ф-ий P, Q и $R \equiv 0$

Зам 2 Если Φ - замкнутая пов-ть, то применяют обозн-ие

$\oiint$ —"—, в котором символ $\oiint$ по умолчанию обозначает $\iint$ал по внешней стороне пов-ти Φ

Доп-ые обозн-ия:

$\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, $\vec{F} = \{P, Q, R\}$

$$\Rightarrow I = \iint_{\Phi} (\vec{F}, \vec{n}) ds = \iint (\vec{F}, d\vec{S}),$$

$d\vec{S} \equiv \vec{n} ds \equiv \{dydz, dzdx, dxdy\}$

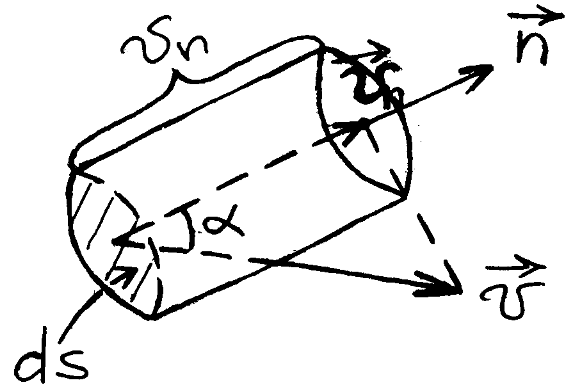
ориент-ые эл-ты пл-ди на пл-ях YZ, ZX и XY соотв-но

Доп-но:

Пример

$$\underset{\Phi}{\iint} \underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{n})\,ds}_{\text{поток жидкости через элемент пов-ти}}$$ – поток жидкости через пов-ть

$\vec{v}\cdot\vec{n} = v_n$



$v_n \cdot ds = \frac{dV}{dt}$ – кол-во жидкости (объём), протекающей через элемент пов-ти ds в данном напр-ии ≡

≡ поток жидкости ~~в~~ через ds в данном направлении (вытекающий поток)

Если $\alpha < \pi/2 \Rightarrow$ поток полож-ен

$> \pi/2 \Rightarrow$ поток отриц-ен

Чтобы найти поток (вытекающий) через всю пов-ть (с учётом знака) надо просум-ать потоки через малые участки ΔS пов-ти Φ – в пределе проф. ать потоки через элементы ds пов-ти Φ

(4) Док-ть, что $V_{\text{сф}} = \frac{1}{3} I$, где

$$I = \underset{\Phi}{\oiint} \overset{P}{x}\,dydz + \overset{Q}{y}\,dzdx + \overset{R}{z}\,dxdy,$$

где Φ — внешняя сторона сферы: $\boxed{23.7}$

$x^2+y^2+z^2=R^2$

Зам Окау-ся, это общий результат (он будет доказан с помощью ф-лы Остроградского – Гаусса в следующем семестре)

Напомню, что $\vec{N}=\{A,B,C\}$ — вектор внешней нормали

$\Longrightarrow \cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, — " —

$dydz=\cos\alpha\, ds=\frac{A}{\cancel{\sqrt{\ }}}\cancel{\sqrt{\ }}\,d\theta d\varphi$ азимутальный и аксиальный углы сферической СК

В результате для I имеем

$$I=\iint\limits_{G_\pi}\Big[\overset{P}{\overset{\shortparallel}{x}}(\theta,\varphi)\cdot A+\overset{Q}{\overset{\shortparallel}{y}}(\theta,\varphi)\cdot B+\overset{R}{\overset{\shortparallel}{z}}(\theta,\varphi)\cdot C\Big]\times$$
$$\times d\theta d\varphi=$$

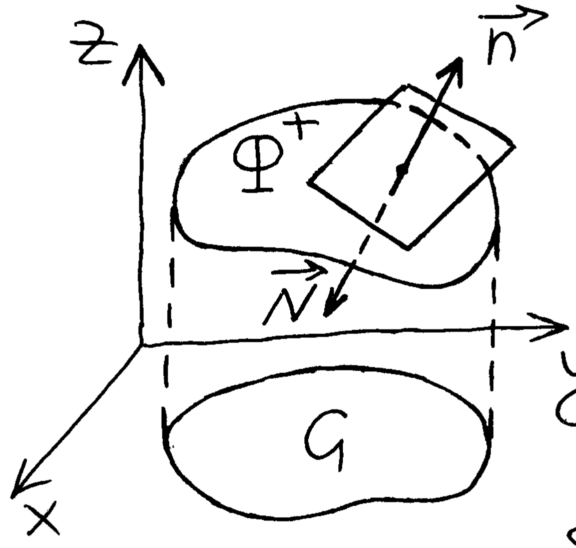
$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\big(R\sin\theta\cos\varphi\cdot R^2\sin^2\theta\cos\varphi+$$

$$+R\sin\theta\sin\varphi\cdot R^2\sin^2\theta\sin\varphi+R\cos\theta\cdot R^2\sin\theta\cos\theta\big)\times$$
$$\times d\theta=$$

$$=R^3\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta=4\pi R^3=3V_{сф}\quad \text{чтд}$$

⑤ Пусть Φ — верхняя сторона графика ф-ии $z=f(x,y)$

23.8



$\vec{N} = \{f_x(M), f_y(M), \underline{\underline{-1}}\}$

у нас встречалось это выражение при рассмотрении ур-ия касат-ой пл-ти к гр-ку ф-ии

$\Rightarrow \vec{n} = -\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \cdot \{-f_x, -f_y, +1\}$

$(\vec{F}, \vec{n})ds = \cancel{\frac{1}{\sqrt{\ }}}(-Pf_x - Qf_y + R)\cancel{\sqrt{\ }}\,dxdy$

$\Rightarrow \iint\limits_{\Phi^+} (\vec{F}\vec{n})ds = \iint\limits_G [-P(x,y,z(x,y))f_x(x,y) - Q(\ )f_y(\ ) + R(\ )]\,dxdy$

обычный — неориент-ый эл-нт площади (значит с "+")

Если выбрана **нижняя** сторона, то

$\iint\limits_{\Phi^-} (\vec{F}\vec{n})ds = \iint\limits_G (+Pf_x + Qf_y - R)dxdy$

Этот результат можно получить формально. При этом надо учитывать, что dydz и т.д. — ориентированные эл-ты пов-ти

$\boxed{23.9}$

$\vec{N} = \{+f_x, +f_y, -1\}$

$\vec{n} = \left\{\underbrace{-\frac{f_x}{\sqrt{\ }}}_{\cos\alpha}, \underbrace{-\frac{f_y}{\sqrt{\ }}}_{\cos\beta}, \underbrace{+\frac{1}{\sqrt{\ }}}_{\cos\gamma}\right\}$

Пусть $(dydz)$ – ориент-ый эл-нт пл-ди (со знаком)

без скобок → $dydz$ – неориент-ый эл-нт пл-ди (положит-ый)

Нап., что α – угол между осью X (ортом $\vec{i}$) и вектором $d\vec{s} \equiv \vec{n}ds$, ~~а значит~~ и одновр-но (~~см.~~ ср. с рис. выше) – угол между эл-ом ds и пл-тью YZ. Тогда

$(dydz) = \cancel{ds_x} \cos\alpha\, ds (= dS_x)$ не понадобится

$dydz = |(dydz)| = |\cos\alpha| ds$

$ds > 0 \Rightarrow \text{sign}(dydz) = \text{sign}(\cos\alpha) = \text{sign}(-f_x)$

$\Rightarrow (dydz) = \text{sign}(-f_x)\, dydz$

Ан-но для $dzdx$ и $dxdy$: — и —

В результате

"неориент-ые" диф-лы (т.е. по сути модули диф-в)

$\iint\limits_{\Phi} P\cdot(dydz) + Q\cdot(dzdx) + R\cdot(dxdy) =$

$|f_x| \leftarrow ||$, т.к. $dz, dx, dy > 0$

$= \iint\limits_{G} \left[P\cdot\text{sign}(-f_x) \overbrace{\frac{dz}{dx}}^{|f_x|} + Q\cdot\text{sign}(-f_y) \underbrace{\frac{dz}{dy}}_{|f_y|} + \right.$

$$+R\Big]\,dx\,dy = \iint_G \left(-Pf_x - Qf_y + \mathbf{R}\right)dx\,dy \quad \boxed{23.10}$$