$$\Rightarrow \exists \iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{G} [P(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \cdot A(u,v) +$$

$$+ Q(\ ) \cdot B(u,v) + R(\ ) \cdot C(u,v)] dudv$$

Δ $\vec{N} = \{A, B, C\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \left\{ \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{\ }}, \frac{C}{\sqrt{\ }} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint\limits_{\Phi} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \equiv$$

$$\equiv \iint\limits_{\Phi} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\underbrace{ds}_{\text{теор } 1} \overset{\cancel{\text{теор } 1\ 2}}{=}$$

$$= \iint\limits_{\Phi} \left[P(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \frac{A(u,v)}{\cancel{\sqrt{\ }}} +\right.$$

$$\left. + Q(\ ) \frac{B(u,v)}{\cancel{\sqrt{\ }}} + R(\ ) \frac{C(u,v)}{\cancel{\sqrt{\ }}} \right] \cancel{\sqrt{\ }}\, dudv$$

$\cancel{\Delta}$

Сл-ие Пусть Φ - верхняя сторона гр-ка ф-ии $z(x,y)$, $(x,y) \in \bar{G}$

Нап, что $\vec{N} = \{A, B, C\} = \{z_x, -z_y, +1\}$ - ~~нужняя~~ верх нормаль

неориент-ого эл-та п-ти

~~$\Rightarrow -\vec{N} = \{-A, B, -C\} = \{-z_x, -z_y, +1\}$ - верхн нормаль~~

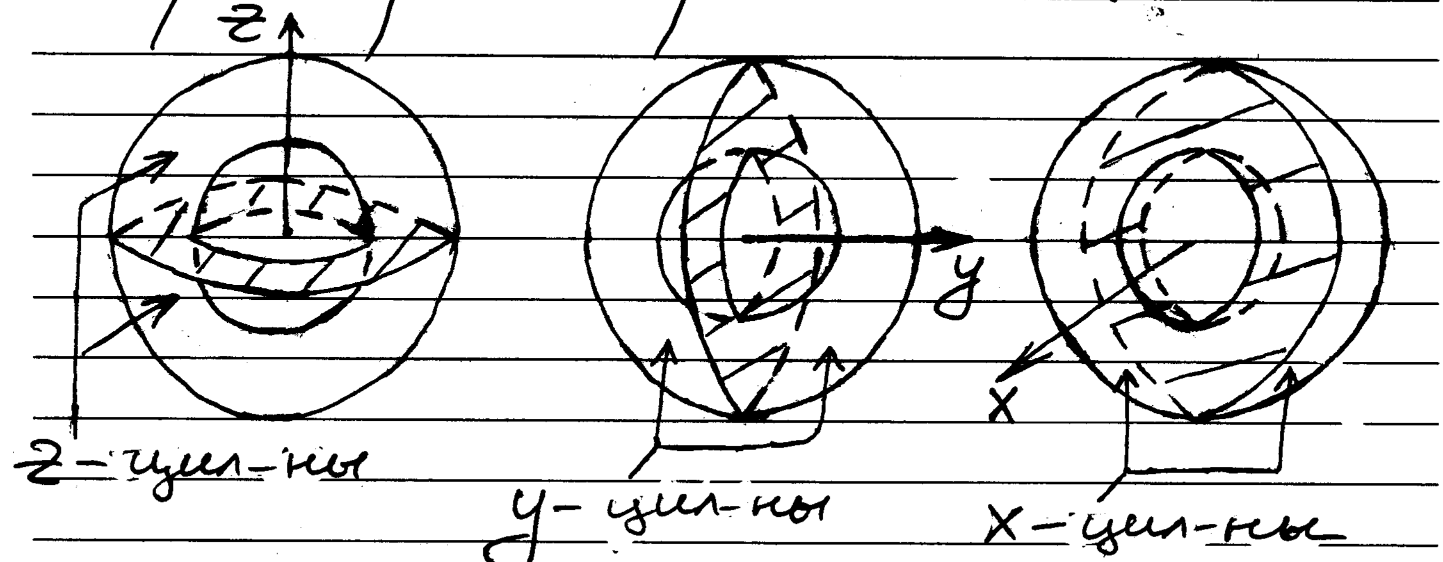
$$\Rightarrow \iint\limits_{\Phi} = \iint\limits_{G} [-P(x,y,z(x,y)) z_x(x,y) - Q(\ ) z_y(x,y) + R(\ )] dxdy$$

§4 Ф-ла Остроградского–Гаусса

Опр Тело T наз простым, если:

1) его можно разбить на кон-ое число x-цил-х тел без общих внутр т-к, гр-цы кот явл-ся кусочно-рег-ой пов-ти
2) — " — y-цил-х — " —
3) — " — z-цил-х — " —

Пример Шаровой слой T



$\Rightarrow$ T – простое тело $\angle$ +Опр+ Зам (см след стр)

Теор 3 (о ф-ле Остр–Гаусса) Пусть ф-ии $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ непр в простом теле T

$$\Rightarrow \boxed{\oint\!\!\!\!\oint_{\Phi} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz}$$

где Φ − внешняя сторона гр-цы тела T

Опр Пов-ть наз замкнутой, если она явл-ся гр-ей нек-го тела

Зам Можно д-ть, что гр-ца простого тела − двустор-яя пов-ть

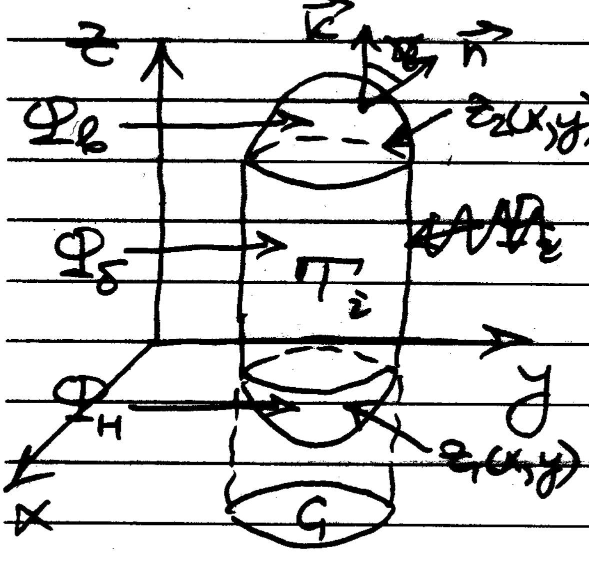
ф-ла Остр-го-Гаусса

Δ Сперва д-м, что

$$\iiint\limits_T \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \oiint\limits_\Phi R\,dxdy \quad (P\equiv Q\equiv 0)$$

Т.к. T − простое тело, то

$T = T_1 \cup \ldots \cup T_n$, T_i − z-цил-ны



Гр-ца T_i − крив-ый цилиндр Φ_i

$$\iiint\limits_{T_i} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iint\limits_G dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dz = \iint\limits_G dxdy \cdot R(x,y,z)\Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} =$$

см сл-ие к теор 2

$$= \iint\limits_G R(x,y,z_2(x,y))\underbrace{dxdy}_{>0} - \iint\limits_G R(x,y,z_1(x,y))\underbrace{dxdy}_{>0} =$$

$$= \iint\limits_{\Phi_в} R(x,y,z)\underbrace{dxdy}_{>0} + \iint\limits_{\Phi_н} R(x,y,z)\underbrace{dxdy}_{<0} \quad (1)$$

$$\iint\limits_{\Phi_в} R\cdot \underbrace{\overset{>0}{\cos(\gamma_в)}\,ds}_{(dxdy)=+dxdy} \qquad \iint\limits_{\Phi_н} R\cdot \underbrace{\overset{<0}{\cos(\gamma_н)}\,ds}_{(dxdy)=-dxdy}$$

Здесь $(dxdy)$ – ориент-ый (т.е. со знаком) эл-нт пл-ди на пл-ти XOY

~~Далее $\Phi_б \perp$~~

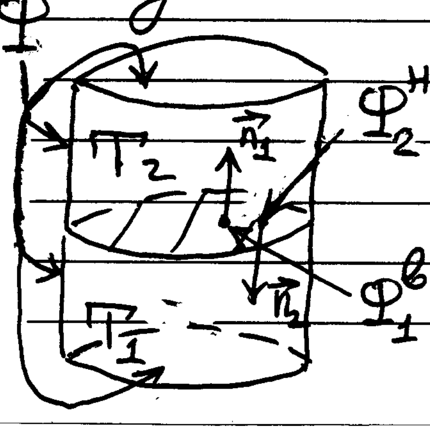
$\Phi_б \perp XOY$, т.е. $\gamma_б = \pi/2 \Rightarrow (dxdy) = \cos\gamma_б\, ds = 0$

$$\Rightarrow \iint\limits_{\Phi_б} R(x,y,z)\,dxdy = 0 \quad (2)$$

Из (1) и (2) пол-ем, что

$$\iiint\limits_{T_i} \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \iint\limits_{\Phi_н} R\,dxdy + \iint\limits_{\Phi_в} R\,dxdy + \iint\limits_{\Phi_б} R\,dxdy = \oiint\limits_{\Phi_i} R\,dxdy \quad (\text{т.к. } \Phi_н + \Phi_в + \Phi_б = \Phi_i)$$

Пусть $T = T_1 \cup T_2$, T_i – z-цил-ны



Φ_i – гр-цы T_i, Φ – гр T

$$\iint\limits_{\Phi_1^в} + \iint\limits_{\Phi_2^н} = 0 \Rightarrow \oiint\limits_{\Phi_1} + \oiint\limits_{\Phi_2} = \oiint\limits_{\Phi}$$

Ан-но для $T = T_1 \cup \ldots \cup T_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \oiint\limits_{\Phi_1} + \ldots + \oiint\limits_{\Phi_n} = \oiint\limits_{\Phi}$$

Тогда

$$\iiint\limits_{T} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{T_1} + \ldots + \iiint\limits_{T_n} =$$

$$= \oiint\limits_{\Phi_1} R\,dx\,dy + \ldots + \oiint\limits_{\Phi_n} R\,dx\,dy = \oiint\limits_{\Phi} R\,dx\,dy \quad (I)$$

чтд

Ан-но:

$$\iiint\limits_{T} \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\Phi} P\,dy\,dz \qquad (II)$$

$$\iiint\limits_{T} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\Phi} Q\,dz\,dx \qquad (III)$$

$(I) + (II) + (III) \Rightarrow$ ф-лу Остр-Гаусса ⊠

Зам 1 Ф-ла Остр-Гаусса спр-ва $\forall$ замкн обл-ти, гр-ца кот-й состоит из кон-го числа кусочно-гл-их пов-ей

Зам 2 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (\vec{\nabla}, \vec{F}) = \operatorname{div} \vec{F}$ – дивергенция в-го поля $\vec{F}(M) = \{P(M), Q(M), R(M)\}$

$$\Rightarrow \oiint\limits_{\Phi} (\vec{F}, \vec{dS}) = \iiint\limits_{T} \operatorname{div} \vec{F}\, dV$$

Сл-ие Пусть $\vec{F} = \vec{r} \equiv \{\underset{P}{x}, \underset{Q}{y}, \underset{R}{z}\}$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{F} = \operatorname{div}\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_{\Phi} \vec{r}\, d\vec{S} = \iint_{\Phi} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy =$$

$$= \iiint_{T} \operatorname{div}\vec{r}\, dV = \iiint_{T} 3\,dV = 3V(T)$$

Т.о. $V(T) = \frac{1}{3}\iint_{\Phi} \vec{r}\, d\vec{S} \equiv \frac{1}{3}\iint_{\Phi} (\vec{r}, \vec{n})\,dS$

~~§5 Ф-ла Стокса~~

начало лекции 24

§5 Ф-ла Стокса

Пусть пов Φ: $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ z = \chi(u,v) \end{cases}$ $(u,v) \in \overline{G}$

~~Опр Пов-ть Ф наз р~~

Опр Рег-ая пов-ть Φ наз рег-ой пов-тью порядка k ($\Phi \in C^k$), если $\varphi, \psi, \chi \in C^k(\overline{G})$

(Т.о., обычная рег-ая пов-ть — рег-ая пов-ть первого порядка)