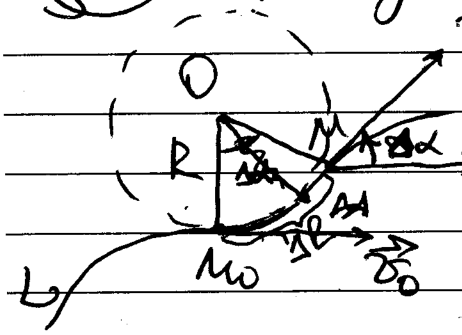
Глава XV

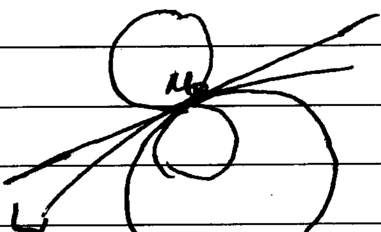
~~Кр~~ ~~Трёхмерные~~ ~~кривые~~

Кривые на плоскости

§1 Кривизна кривой



~~$\Delta\alpha \approx$~~ $\angle M_0OM \approx \Delta\alpha$



$L \in C^2$

~~В случае~~ Если L – достаточно гладкая кривая, то $\exists !$ Среди всех окружностей, касающихся данной кривой ~~в сущ-ей~~ в т. M_0 найдётся единственная окр-ть порядок касания которой с кривой ≥ 2 (тогда для всех ост-ых окр-ей порядок касания $= 1$). Эту окр-ть наз-ют соприкасающ-ся окр-тью для кривой L в т. M_0

порядок касания см. в §2 (в будущем поменяв эти §-ы местами)

Радиус соприкас-ся окр-ти наз-ют радиусом кривизны кривой в т. M_0

Введём понятие кривизны

Опр $\frac{\Delta\alpha}{\Delta l} \equiv K_{ср}$ – средняя кривизна дуги M_0M кривой L

Опр $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta l} \equiv \frac{d\alpha}{dl} \equiv K$ – кривизна кривой L в т. M_0

Получим выражение для кривизны кривой L, ~~заданной парам-ки:~~ $\cancel{\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}}$

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \Delta\vec{v}, \quad \Delta l = v_{ср}|\Delta t|, \quad [\vec{v_0}, \vec{v_0}] = 0$$

$$\sin\Delta\alpha = \frac{|[\vec{v_0}, \vec{v}]|}{v_0 \cdot v} = \frac{|[\vec{v_0}, \vec{v_0} + \Delta\vec{v}]|}{v_0 \cdot v} = \frac{|[\vec{v_0}, \Delta\vec{v}]|}{v_0 \cdot v}$$

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \underbrace{\frac{\Delta\alpha}{\sin\Delta\alpha}}_{1} \frac{\sin\Delta\alpha}{\Delta l} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{v_0 \cdot \underbrace{v}_{v_0} \cdot \underbrace{v_{ср}}_{v_0}} \left|\left[\vec{v_0}, \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right]\right| = \frac{|[\vec{v_0}, \vec{a_0}]|}{v_0^3}$$

В случае кривой, заданной парам-ки: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$

$$\vec{v_0} = \{\dot\varphi, \dot\psi\}, \quad \vec{a_0} = \{\ddot\varphi, \ddot\psi\}$$

$$\Rightarrow [\vec{v_0}, \vec{a_0}] = \begin{vmatrix} \dot\varphi & \dot\psi \\ \ddot\varphi & \ddot\psi \end{vmatrix}$$

$$\boxed{k = \frac{|\dot\varphi\ddot\psi - \ddot\varphi\dot\psi|}{(\dot\varphi^2 + \dot\psi^2)^{3/2}}}$$

Зам 1 Иногда кривизну опр-ют со знаком (учитывая знак угла $\Delta\alpha$ — на рис. он положителен). Тогда модуль в формуле для кривизны нужно снять

В случае кривой, заданной явно

$$y = f(x) \Rightarrow \begin{cases} x = t = \varphi(t) \\ y = f(x) = f(t) \equiv \psi(t) \end{cases}$$

$$\dot\varphi = 1, \ \ddot\varphi = 0; \ \dot\psi = f'(t) = f'(x), \ \ddot\psi = f''(x)$$

$$k = \frac{|f''(x_0)|}{(1 + f'^2(x_0))^{3/2}}$$

Зам 2. Мы считаем, что на кривой нет особых точек, т.е., что $\dot\varphi^2 + \dot\psi^2 \neq 0$ во всех т-х кривой L

Наконец, в случае ~~кривой же~~ неявно заданной кривой:

$F(x, y) = 0$

выражение для кривизны кривой примет вид

$k =$ | Вывод есть в дополн-ых матер-ах