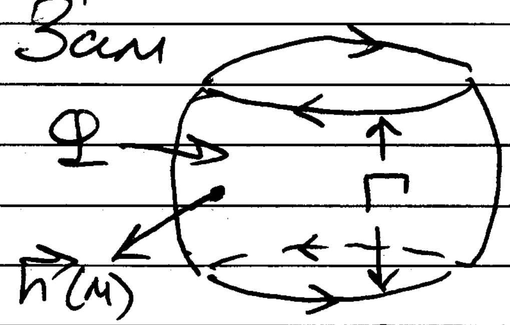
§5 Ф-ла Стокса

Теор. (о ф-ле Стокса) Пусть $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z) \in C^1(T)$, где T — обл $\subset E^3$ и пусть $\Phi \in C^2$ — ориент-ая пов-ть $\subset T$, гр-ца кот-й состоит из кон-го числа замкн-х кусочно гл-их кривых. Тогда

$$\boxed{\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{\Phi} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy}$$

— ф-ла Стокса

Зам

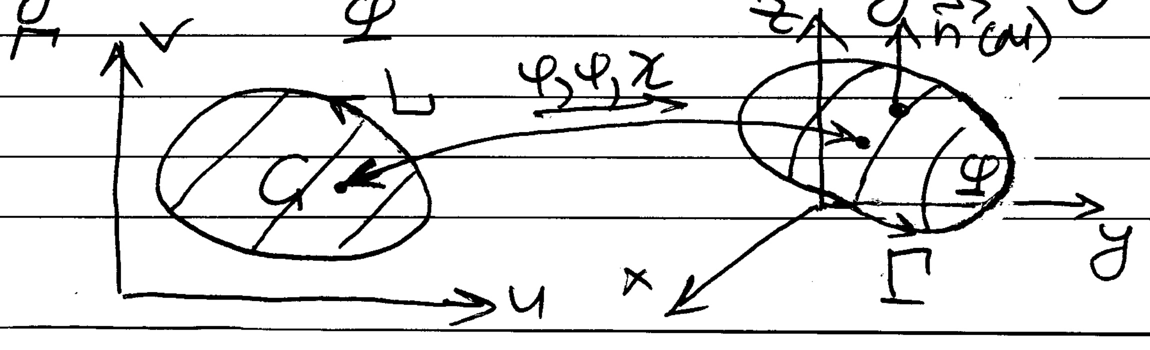


$\oint\limits_{\Gamma}$ берётся в "+" напр-ии

Доп: $P, Q, R \in C^1(T)$, $\exists T \subset E^3: T \supset \Phi$ $\Leftrightarrow$ $P, Q, R \in C^1(\Phi)$

Δ Пусть $Q \equiv R \equiv 0$. Д-м, что

$$\oint\limits_{\Gamma} P\,dx = \iint\limits_{\Phi} \frac{\partial P}{\partial z} dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy \qquad (\mathrm{I})$$



(контур будет обходиться в "+" напр) 24.2

Пусть Φ: $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ z = \chi(u,v) \end{cases}$ $(u,v) \in G$ $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$

в силу того, что мы выберем $\vec{N} = \{A, B, C\}$)

Д-м ф-лу Стокса для той стороны Φ, для кот-й $\vec{N} = \{A, B, C\}$ - в-р нормали

Зам, что тогда для обр-ой стороны Φ

$$\iint\limits_{\Phi} \mapsto -\iint\limits_{\Phi} \text{ и } \oint\limits_{\Gamma} \mapsto -\oint\limits_{\Gamma}$$

$\Rightarrow$ ф-ла Стокса также окаж-ся спр-ой

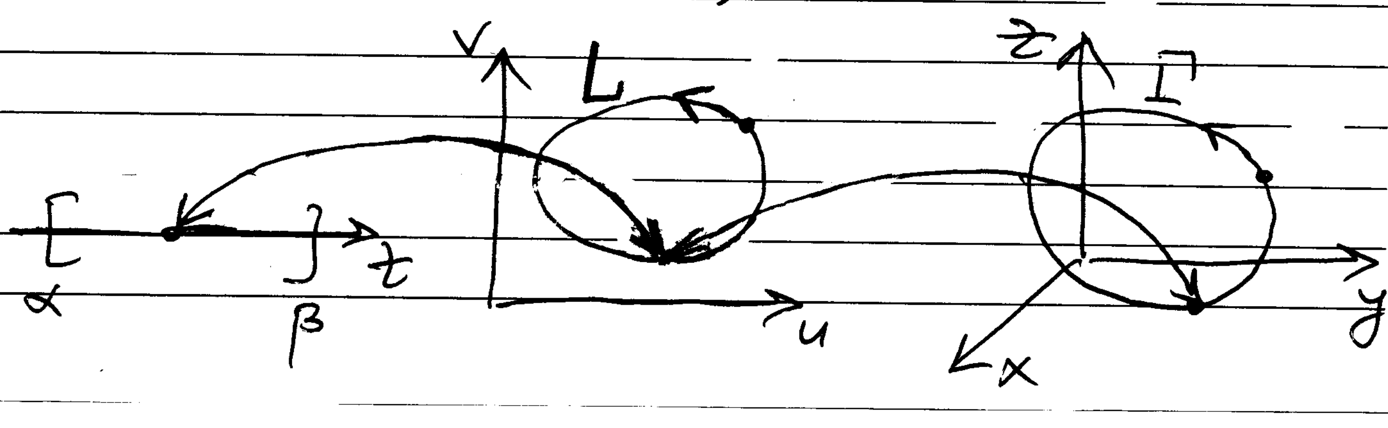
Рассм правую часть (I). По теор 3

$$\iint\limits_{\Phi} \underbrace{0}_{P} \cdot dydz + \underbrace{\frac{\partial P}{\partial z}}_{Q} dzdx - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial y}}_{R} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{G} \Big[0 \cdot A(u,v) + \frac{\partial P}{\partial z}(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \cdot B(u,v) -$$

$$- \frac{\partial P}{\partial y}(\quad) \cdot C(u,v) \Big] dudv \qquad (1)$$

Пусть L: $\begin{cases} u = \tilde{u}(t) \\ v = \tilde{v}(t) \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$



Тогда

$\Gamma \equiv \{M(x,y,z) \mid x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v),\ z=\chi(u,v),\ (u,v)\in L\} =$

$= \{M(x,y,z) \mid x=\underbrace{\varphi(\tilde{u}(t),\tilde{v}(t))}_{\tilde{\varphi}(t)},\ y=\underbrace{\psi(\ )}_{\tilde{\psi}(t)},\ z=\underbrace{\chi(\ )}_{\tilde{\chi}(t)},\ t\in[\alpha,\beta]\}$

Рассм левую часть (I). По теор о связи кр-го $\int$ла II рода по $\Gamma\subset E^3$ с опр-м $\int$ом

$$\oint_\Gamma P(x,y,z)dx = \int_\alpha^\beta P(\tilde{\varphi}(t),\tilde{\psi}(t),\tilde{\chi}(t))\cdot\dot{\tilde{\varphi}}(t)dt$$

$$\dot{\tilde{\varphi}}(t) \equiv \frac{d}{dt}\varphi(\overset{u}{\tilde{u}(t)},\overset{v}{\tilde{v}(t)}) =$$

$$= \varphi_u(\tilde{u}(t),\tilde{v}(t))\cdot\dot{\tilde{u}}(t) + \varphi_v(\ )\cdot\dot{\tilde{v}}(t)$$

$$\Rightarrow \oint_\Gamma P(x,y,z)dx = \overbrace{\int_\alpha^\beta P(\varphi(\tilde{u}(t),\tilde{v}(t)),\psi(\ ),\chi(\ ))\cdot\varphi_u(\ )\cdot\dot{\tilde{u}}(t)dt}^{\tilde{P}(\tilde{u}(t),\tilde{v}(t))} +$$

$$+ \underbrace{\int_\alpha^\beta P(\varphi(\tilde{u}(t),\tilde{v}(t)),\psi(\ ),\chi(\ ))\cdot\varphi_v(\ )\cdot\dot{\tilde{v}}(t)dt}_{\tilde{Q}(\tilde{u}(t),\tilde{v}(t))} =$$

$$= \oint_L \tilde{P}(u,v)du + \tilde{Q}(u,v)dv \qquad (2)$$

по теор о связи кр-го $\int$ла II рода по $L\subset E^2$ с опр-м $\int$ом где $\tilde{P}(u,v) = P(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \cdot \varphi_u(u,v)$

$\tilde{Q}(u,v) = P(\quad) \cdot \varphi_v(u,v)$

Применяя ф-лу Грина к (2), пол-м

$$\oint\limits_{P} P(x,y,z)\,dx = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial u} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial v}\right) du\,dv \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial u} = \frac{D}{Du} P(\varphi(u,v), \psi(\,), \chi(\,)) \cdot \varphi_v(\,) =$$

$$= (P_x \varphi_u + P_y \psi_u + P_z \chi_u)\varphi_v + P \underset{\text{т.к. } \Phi \in C^2}{\underset{\|}{\varphi_{vu}}}$$

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial v} = (P_x \varphi_v + P_y \psi_v + P_z \chi_v)\varphi_u + P \varphi_{uv}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial u} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial v} = P_y \cdot \underbrace{(\psi_u \varphi_v - \psi_v \varphi_u)}_{-C} + P_z \cdot \underbrace{(\chi_u \varphi_v - \chi_v \varphi_u)}_{+B} =$$

$$\begin{array}{cccc} C & & A & B \\ \varphi_u & \psi_u & \chi_u & \varphi_u \\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v & \varphi_v \end{array} \qquad = -\frac{\partial P}{\partial y} \cdot C + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot B \qquad (4)$$

Т.о., (4) → (3) ⇒

$$\Rightarrow \oint\limits_{\Gamma} P\,dx = \iint\limits_{G} \left[\frac{\partial P}{\partial z}(\varphi(u,v), \psi(\,), \chi(\,)) \cdot B(u,v) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial P}{\partial y}(\quad) \cdot C(u,v)\right] du\,dv \qquad (5)$$

Из (1) и (5) пол-ся, что

$$\oint_L P\,dx = \iint_\Phi \frac{\partial P}{\partial z}dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy \quad (\mathrm{I})$$

Ан-но док-ся, что $\left[\begin{array}{cc} x & P \\ y \to z & Q \to R \end{array}\right]$

$$\oint_\Gamma Q\,dy,\ \oint_\Gamma R\,dz = \text{— " —} \quad (\mathrm{II}),\ (\mathrm{III})$$

$(\mathrm{I})+(\mathrm{II})+(\mathrm{III}) \Rightarrow$ ф-лу Стокса $\cancel{\Delta}$

Зам $\operatorname{rot}\vec{F} \equiv [\vec{\nabla}, \vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$

$= \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \text{— " —}$

— ротор в-го поля $\vec{F}(M) = \{P(M), Q(M), R(M)\}$

$$\Rightarrow \underbrace{\oint_\Gamma (\vec{F}, d\vec{l})}_{\text{циркул-я поля } \vec{F} \text{ вдоль контура } L} = \underbrace{\iint_\Phi (\operatorname{rot}\vec{F}, d\vec{S})}_{\text{поток поля } \operatorname{rot}\vec{F} \text{ через пов-ть } \Phi}$$

$$(\operatorname{rot}\vec{F}, d\vec{S}) = [\vec{\nabla}, \vec{F}]\,d\vec{S} = \vec{\nabla}\vec{F}\,d\vec{S} = d\vec{S}\,\vec{\nabla}\vec{F} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \\ dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy \end{vmatrix}$$