Лекция 2

Теорема. Огр-ое сверху мн-во имеет точную верхнюю грань

Δ Пусть X - огр-ое сверху мн-во, т.е. пусть $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow x \leq M$

Могут предст-ся два случая:

1) $\exists x \in X : x \geq 0$ (у мн-ва X есть хотя бы один неотр-й эл-т)

2) $\forall x \in X \Rightarrow x < 0$ (все эл-ты мн-ва X отр-ны)

Док-во случая 1) (также как и док-во сл-я два) разбивается на две части

В первой части док-ва предлагается некоторый процесс, в рез-те которого получается число $\bar{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots$ претендующее на то, чтобы наз-ся точной верхней гранью (этот процесс наз-ют формальным постр-м точной верх-й грани). Во второй части док-ва обосн-ся, что постр-ое нами число $\bar{x}$ дейст-но явл-ся точной верхней гр-ю мн-ва X.

Первая часть док-ва содержит в себе некий эвристический момент (элемент угадывания, открытия). Опираясь на интуицию и опыт работы с вещ-ми числами мы должны догадаться, увидеть искомую процедуру построения точной верхней грани, совершив маленькое научное открытие. Вторая часть док-ва (как это обычно бывает ~~в~~ подобного рода док-х) более громоздка и менее интересна, но всё же необходима - ~~часто~~ иногда окаж-ся, что процесс конструирования той или иной величины, сколь бы правдоподобным и очев-м о ~~ни~~ не казался, приводит к ложному рез-ту

Заметим, что подобный способ док-ва (связанный с разделением его на ~~две части~~ указанные) очень часто исп-ся при док-ве сущ-я ~~во~~ различных величин (напр, реш-й диф-х ур-й). С этим подходом Вы ещё не раз столкнётесь как в рамках анализа, так и при изучении других мат-х дисциплин

Итак, в соот-вии со сказанным

I) строим $\bar{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots$ ← нек-ое вещ-ое число

II) док-ем, что $\bar{x} = \sup X$

Сперва формально строим некое число $\bar{x}$ = -и-, а после этого док-ем, что оно явл-ся точной верх-й гр-ю $x \geq 0$

I) Рассм-м мн-во $X_+ \equiv \{x \in X \mid x = +x_0, x_1 \ldots\} \neq \emptyset$

$\forall x \in X_+ \Rightarrow x_0 \leq x \leq M \Rightarrow x_0 \leq M$

в силу транзит-ти знака $\leq$

$\{x_0\}$ - мн-во целых частей чисел $\in X_+$

У огр-го сверху мн-ва целых чисел всегда $\exists$ет max-й эл-т. Это св-во может быть выведено из осн-х св-в целых чисел, но мы не будем ~~его выводить~~ этого делать, используя его сразу как изв-ое св-во мн-ва целых чисел. Оно довольно очевидно. Напр, мн-во натур-х чисел ≤ 100 заведомо имеет max-й эл-т, даже если 100 и не прин-т этому мн-ву

$\max\limits_{X_+}\{x_0\} \equiv \bar{x}_0$ – max-я из целых частей чисел, $\in$-х X_+

Рассм-м мн-во $X_0 \equiv \{x \in X \mid x = \bar{x}_0, x_1 \dots\}$ ← "+" подр-ем

$\{x_1\}$ – мн-во первых десят-х знаков чисел из X_0

$\max\limits_{X_0}\{x_1\} \equiv \bar{x}_1$ (среди цифр всегда можно выбрать наибольшую)

Рассм-м мн-во $X_1 \equiv \{x \in X \mid x = \bar{x}_0, \bar{x}_1 x_2 \dots\}$

$\max\limits_{X_1}\{x_2\} \equiv \bar{x}_2$

— " —

Опишем ещё произвольный промежут-й k-й шаг, фиксир-й $\bar{x}_k$. При фиксации $\bar{x}_1$ мы рассм-м мн-во X_0, при фиксации $\bar{x}_2$ – мн-во X_1. Ясно, что для фиксации $\bar{x}_k$ надо рассм-ть мн-во

$X_{k-1} \equiv \{x \in X \mid x = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{k-1} x_k \dots\}$

т.е. должны быть фиксированы целая часть и все десят-ые знаки вплоть до (k-1)-го вкл-но

$\max\limits_{X_{k-1}}\{x_k\} \equiv \bar{x}_k$

— " —

Продолжая неогр-но этот процесс, мы опр-м $\bar{x}_k$ для всех k

II) Рассм-м число

$\bar{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \dots$

и док-м, что $\bar{x} = \sup X$. Нап-м, что согласно опр-ю $\sup X$ это значит, что

а) $\forall x \in X \Rightarrow x \le \bar{x}$

б) $\forall \tilde{x} < \bar{x} \Rightarrow \exists x \in X : x > \tilde{x}$

(а) и б), чтобы не путать с 1) и 2))

В б) будем док-ть конструктивно! (если $x<0$, то очевидно, а если $x \ge 0$, то по шагам)

Δ а) От противного. Предположим, что вып-но отр-ие а), т.е. что

Эх, а по-моему всё-таки лучше ~~конструктивное~~ более конструктивное док-во а)! (как в Ильине-Позняке)

$\exists x \in X : x > \bar{x}$

Далее, исходя из этого пред-я, получим нек-ое противоречие, ~~которое~~ наличие с логической точки зрения будет означать, что выдвинутое предп-ие неверно

Прежде всего заметим, что поск-ку $\bar{x}$ по построению ≥ 0, то ~~число x~~ расcм-ое нами число x (превосх-ее $\bar{x}$) обяз-но имеет пол-й знак

$\bar{x} \ge 0 \Rightarrow x > 0$

Предст-м x в виде $x = +x_0, x_1 \dots$

Т.к. по предпол-ю $x > \bar{x}$, то согласно правилу ср-я в-х чисел

$$\exists k \in \mathbb{N}_0 : \begin{cases} x_i = \bar{x}_i & \forall i = \overline{0, k-1} \\ x_k > \bar{x}_k \end{cases},$$

т.е. $x = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{k-1} x_k \dots$, а значит $\in X_{k-1}$ (по опр-ю X_{k-1})

С другой стороны, из опр-я $\bar{x}_k$ вытекает, что

нер-во $\square$ действ-но должно вып-ся

$x_k \le \bar{x}_k = \max\limits_{X_{k-1}} \{x_k\}$ ($\bar{x}_k$ – max-я k-я десят-я цифра из всех чисел X_{k-1}) $\in x$

Получ-ое противор-е опров-ет наше пред-ие о том, что $\exists x \in X : x > \bar{x}$, т.е. $\forall x \in X \Rightarrow x \le \bar{x}$ $\blacktriangle$ а)

Δ б) Рассм-м произвое $\tilde{x}$: $\tilde{x} < \bar{x}$ и покажем, что при $\forall$ таком $\tilde{x}$ найдётся $x \in X$ его превосходящее

Напомним, что док-во теоремы пока проводится в рамках случая 1), т.е. случая такого мн-ва X, которое имеет хотя бы один неотр-й эл-т

$\exists x \in X : x \geq 0$

Но тогда, если $\tilde{x} < 0$, то в качестве искомого $x \in X$, превосход-го $\tilde{x}$ дост-но взять $\forall$ неотр-й эл-т мн-ва X:

поскольку $\tilde{x} < 0 \leq x \Rightarrow \tilde{x} < x$

Пусть теперь $0 \leq \tilde{x} = \tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \ldots < \bar{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \ldots$

Согласно правилу ср-я вещ-х чисел последнее нер-во означает, что

$$\exists k \in \mathbb{N}_0 : \begin{cases} \tilde{x}_i = \bar{x}_i & \forall i = \overline{0, k-1} \\ \tilde{x}_k < \bar{x}_k \end{cases},$$

т.е. $\tilde{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{k-1} \tilde{x}_k \ldots$

Но тогда в кач-ве иск-го x дост-но взять $\forall x \in X_k$. Убедимся в этом

Возьмём $\forall x \in X_k$. По опр-ю мн-ва X_k такое x имеет вид

$x = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_k x_{k+1} \ldots$,

а значит, поск-ку $\bar{x}_k > \tilde{x}_k$, то в самом деле спр-во $x > \tilde{x}$

Итак, мы док-ли, что

$\forall \tilde{x} < \bar{x} \Rightarrow \exists x \in X : x > \tilde{x}$ $\quad \blacktriangle$ б)

2) Обратимся к сл-ю 2):

$\forall x \in X \Rightarrow x < 0 \Rightarrow x = -x_0, x_1 \dots$ (имеет десят-ое предст-ие со знаком "–")

Заметим, что отр-ое число тем больше, чем его модуль, а значит и его целая часть и пос-лед-ие десят-ые знаки меньше

В соотв-ии с этим замеч-м число $\bar{x}$ строится в виде

$$\bar{x} = -\bar{x}_0, \bar{x}_1 \dots$$

При этом $\bar{x}_0 \equiv \min\limits_{X} \{x_0\}$ – мин-я из целых частей чисел мн-ва X

Далее вводится мн-во $X_0 \equiv \{x \in X \mid x = -\bar{x}_0, x_1 \dots\}$ и $\bar{x}_1$ полаг-ся равным

$$\bar{x}_1 \equiv \min\limits_{X_0} \{x_1\}$$ – min-я среди первых десят-х цифр чисел из X_0

—— " —— и т.д.

Док-во того, что постр-ое $\bar{x} = \sup X$ полн-ю ан-но док-ву для случая 1

Теорема доказана ⌀

Задание: сформул-те и док-те теорему о ∃-ии $\inf X$ у огр-го снизу мн-ва

Число $\bar{x}$, постр-ое при рассм-ии случая 1), вполне может оказ-ся пер-й дес-й дробью, имеющей периодом цифру 9. Так будет, напр, в случае мн-ва $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 10\}$

При построении $\bar{x}$ для этого мн-ва сначала мы выберем числа с наиб-й целой частью, т.е. ~~9~~ числа вида 9,...

Далее ~~выберем~~ из этих чисел выберем числа с max-м знач-м первого разряда, т.е. числа вида 9,9...

Продолжая ~~этот~~ данный процесс, получим в итоге, что $\bar{x} = 9{,}999... = 9{,}(9)$

~~И~~ Это ещё одна причина, по кот-й не вполне удобно отк-ваться от дес-х дробей с 9-кой в периоде. Если бы мы отк-сь от такого пред-~~д~~ия, то нам ~~бы~~ пришлось модифиц-ть док-во так, чтобы избежать появл-я подоб-х чисел. При исполь-ии же двоякого пред-я (т.е. дробей его как с нулём, так и с 9-й в периоде) в данной модификации нет необх-ти. При желании (или если это вдруг действ-но понадобится, напр при сравнении $\bar{x}$ с другими числами) мы всегда можем, по окончании процесса постр-я супремума заменить пер-ю дробь с 9-кой в периоде на равную ей, ~~с пери-одом н~~ имеющую периодом нуль (напр, 9(9) на 10,(0))

§5 Арифметические операции над вещ-ми числами

Сложение и умн-ие вещ-х чисел можно опр-ть соотв-но через сл-ие и умн-ие рац-х чисел и исполь-ие точных граней числ-х мн-в

I) Сложение в-х чисел

Пусть треб-ся сл-ть два вещ-х числа x и y.

Как мы выяснили ранее

$\forall x$ и $y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\ x_r, \bar{x}_r$ и $y_r, \bar{y}_r \in \mathbb{Q}$:

$x_r \le x \le \bar{x}_r$ и $y_r \le y \le \bar{y}_r$

~~Понятно, что~~

$$\sup\{\underset{\uparrow}{x_r} \mid x_r \le x\} = x$$

индекс r здесь и далее означает рац-ть (чтобы каждый раз не писать $\in \mathbb{Q}$)

Потому что $\exists$-т рац-ые числа сколь угодно близкие к данному вещ-му числу x

При этом, если x само рац-но, то одно из x_r вообще с ним совпадает, а если x - ир-но, то все $x_r < x$

Ан-но $\sup\{y_r \mid y_r \le y\} = y$

Тогда естественно считать, что

$$\sup\underbrace{\{\overset{\swarrow\ \text{сумма рац-х чисел}}{x_r + y_r} \mid x_r \le x,\ y_r \le y\}}_{\equiv S} \equiv x+y$$ (опр-ся по правилу слож-я рац-х чисел)

Опр $\quad x+y = \sup S$

Т.о., исп-я sup-м, мы опр-лили сумму вещ-х чисел через сумму рац-х

Чтобы этот sup-м ~~всегда~~ заведомо $\exists$-л (т.е., чтобы опр-ие суммы было корректным), мн-во рассм-х сумм $x_r + y_r$ всегда должно быть огр-но сверху. Док-м это

Док-во кор-ти опр-я суммы

Δ $x_r \le x \le \overline{x}_r \Rightarrow x_r \le \overline{x}_r$
$y_r \le y \le \overline{y}_r \Rightarrow y_r \le \overline{y}_r$ $\Bigg\} \Rightarrow x_r + y_r \le \underbrace{\overline{x}_r + \overline{y}_r}_{\text{искомая мажоранта}}$

Т.о., $\{x_r + y_r\}$ – огр-но $\Rightarrow$ $\sup S$ сущ-т $\Rightarrow$ опр кор-но ▲

Зам-ие 1. Мы не могли огр-ть $x_r + y_r$ суммой $x+y$ – это было бы тавтологично, ибо $x+y = \sup S$, а мы ещё не убедились в том, что этот sup-м ∃-ет (мы это как раз и док-м)

Зам-ие 2. Сумму вещ-х чисел можно также опр-ть как точную нижнюю грань мн-ва всех сумм превосх-щ их рац-х чисел и док-ть, что такое опр-ие совпадает с нашим

II) Произв-ие вещ-х чисел

1) Пусть $x > 0$ и $y > 0$ – перемн-ые вещ-ые числа

$\forall x, y \in \mathbb{R} : x > 0, y > 0 \Rightarrow \exists\, x_r, \overline{x}_r$ и $y_r, \overline{y}_r$:

$0 < \overset{\le x}{x_r} \le \overline{x}_r$ и $0 < \overset{\le y}{y_r} \le \overline{y}_r$

дост-но занулить все десят-ые знаки y x после первого ненулевого разряда

Опр $x \cdot y = \sup\{x_r \cdot y_r \mid x_r \le x, y_r \le y\}$

перемн-ся по правилу ум-я рац-х чисел

Док-во кор-ти опр-я произв-я, т.е. док-во ∃-я sup-ма, полностью ан-но док-ву кор-ти опр-я суммы

2) $\forall x \in \mathbb{R} \overset{\text{полагаем}}{\Longrightarrow} x \cdot 0 = 0$

Пусть теперь x и y – ∀ вещ-ые числа

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ полагаем

$$x \cdot y = \begin{cases} +|x|\cdot|y|, & \text{если } x \text{ и } y \text{ одного знака} \\ -|x|\cdot|y|, & \text{— " — разного знака} \end{cases}$$

перемн-ть неотр-ые числа мы уже умеем

Вычитание и деление опр-ся как дейст-я обратные соот-но сл-ю и умн-ю

III) Можно док-ть, что $\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists!\, z \in \mathbb{R}$: $y + z = x$, назыв-ое разн-ю x и y и обозн-ое через $x - y$: $z \equiv x - y$

IV) Ан-но можно док-ть, что $\forall x \in \mathbb{R}$ и $\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow \exists!\, z \in \mathbb{R} : y \cdot z = x$, наз-ое частным x и y и обозн-ое через x/y : $z \equiv \frac{x}{y}$] вещ-ые числа!

Некот-е св-ва оп-й над в-ми числами

а) $-|a| \le a \le +|a|$

б) $|a+b| \le |a| + |b|$

вытекают из опр-я $|\ |$ и + (док-ть сам-но)

в) $|a-b| \ge |a| - |b|$

Δ $\underbrace{|(a-b)+b|}_{=|a|} \overset{б)}{\le} |a-b| + |b|$ $\blacktriangle$

Ан-но $(a \leftrightarrow b)$ $|a-b| \ge |b| - |a|$

$\Rightarrow |a-b| \ge \big||a| - |b|\big|$

§6 Геометрическое изображение вещественных чисел

Из аксиом геометрии сл-ет, что между мн-м вещ-х чисел и ~~между~~ мн-м точек любой прямой можно установить взаимно одн-ое соотв-ие

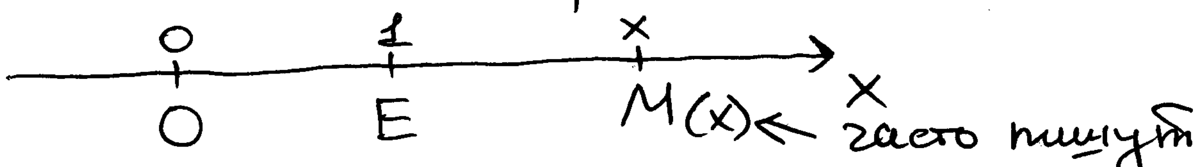
$\mathbb{R} \leftrightarrow \{$точки прямой$\}$

т.е. такое соотв-ие, при котором каждому в-му числу ~~$\mathbb{R}$~~ соотв-т !-я точка прямой и наоборот - каждой точке прямой отвечает !-ое вещ-ое число

Однако таких соотв-й на самом деле ∞ много. Чтобы выделить какое-н одно из них, пост-ют сл-м образом

На рассм-й прямой выделяют

1) т. O $\Leftrightarrow$ число 0 $\leftarrow$ начало коорд-т
2) Положит-ое напр-ие (пол-ую полупрямую)
3) Масшт-й ~~от~~ отр-к $OE = 1$ (длина кот-го $= 1$)



Такую прямую принято наз-ть коорд-й прямой или вещ-й осью и обозн-ть символом какой-н перем-й (скажем x), если на ней будут отобр-ся значения именно этой перем-й, или просто заглавной буквой $\mathbb{R}$

Поскольку каждому числу $\mathbb{R}$, т.о., отв-т вполне опр-я точка коорд-й прямой, вещ-ые числа часто наз-т точками и говорят, напр, точка 5 или точка $x=5$ и т.д.

Не останав-сь на деталях процедуры устан-я соотв-я $x \Leftrightarrow M$ (между x и M), ~~так~~ отмечу лишь, что каждой точке M вещ-й оси отв-т число x =ое длине отр-ка OM со знаком "+", если $M \in$ правой (пол-й) полуоси и со знаком "–" – если левой (отр-й) полуоси. Длина отр-ка OM, в свою очередь, опр-ся как отн-ие длин OM и OE, кот-ое, как уже констатиров-сь, ~~в~~ в общем случае не предст-я рац-м числом

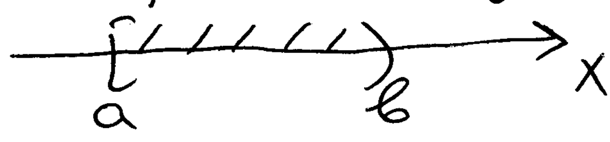
Рассм-м ~~нек~~ примеры нек-х числовых мн-в, кот-ые мы теперь можем воспр-нимать и как мн-ва точек вещ-й оси

Пусть a и $b \in \mathbb{R}$ (или, что то же самое, ~~два~~ точки вещ-й оси)

первая группа примеров

он же

1) $[a,b) \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ – полусегмент / полуотрезок / полуинтервал



$a = \inf [a,b)$
$b = \sup [a,b)$

Все точки $[a,b)$ лежат между inf и sup (это справ-во вообще для любого огр-го мн-ва), причём среди точек $[a,b)$ имеются сколь угодно близкие как к inf, так и к sup (последнее св-во также распростр-ся на произв-ые огр-ое мн-ва)

Ан-но опр-ся инервал (a,b) и сегмент/ ~~полу~~ отр-к $[a,b]$

2) Окр-тью т. C вещ-й оси наз-т $\forall$ инт-л (a,b): $C\in(a,b)$ (т.е. $\forall$ инт-л, сод-й данную точку)

Среди окр-й т. C выделяют особые — симмет-р-ые, т.н. ε- окр-ти

обозначение

ε-окр-ть т. $C \equiv (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \equiv O_\varepsilon(c)$

(ясно, что т. C ей $\in$-т)

открытые и замкнутые полупрямые

3) $[a,+\infty)\equiv\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq a\}$

Ан-но опр-ся $(a,+\infty)$, $(-\infty,a]\overset{\text{и}}{\underset{\text{?}}{}}(-\infty,a)$

$(-\infty;+\infty)\equiv\mathbb{R}$ (мн-во всех в-х чисел)

Каждое из мн-в вида 1), 2) и 3) наз-ся числовым промежутком (мн-ва "без разрывов")

На этом мы заканчиваем с теорией вещ-х чисел и переходим к след-й главе, посвящ-й пределу действ-х ф-й

Глава II

Предел функции

§1 Понятие функции

Предел функции — одно из ключевых понятиб анализа. К нему сводятся, ~~такие важ~~ напр, такие важные св-ва функций, как непрер-ть и дцер-ть, к рассм-ю которых мы перейдём в самое ближайшее время.

Прежде чем дать опр-ие предела ф-ции, уточним, что мы будем под словом ф-я подразумевать

Пусть X – непустое мн-во вещ-х чисел

$X \subset \mathbb{R}$ и $X \neq \emptyset$

Символ x, обознач-ий произв-ое число $\in X$ принято наз-ть перем-й велич-й или перем-й x

~~Всюду~~ Далее под словом число по умолчанию подразумевается вещ-ое число

Итак, введём понятие функции

Если каждому числу $x \in X$ в силу некоторого закона f поставлено в соотв-ие !-ое (единственное) число y, то говорят, что на мн-ве X задана функция f и пишут $y = f(x)$ или $y = y(x)$. При этом мн-во X наз-ся обл-ю опр-я функции f

Переменную x, обозначающую произв-~~ое~~ ~~зн-е~~ ый эл-т из X, наз-т независ-й перем-й или аргументом функции f

Число y, отвеч-ее фикс-му зн-ю x наз-т частным значением ф-ции в т. x

Символ f в обозначении функции $f(x)$ наз-ся характеристикой ф-ии

Замеч-ие. Строго говоря, запись $f(x)$ означает частное зн-ие ф-ии, в то время как саму ф-ю след-т обозначать просто буквой f. Но так уж исторически сложилось, что под символом $f(x)$ подразум-т не только частное знач-е ф-ии, но и её саму

Мн-во значений ф-ии f опр-ся как

$Y \equiv \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in X : y = f(x)\}$, т.е. как совок-ть всех частных зн-й этой ф-ии

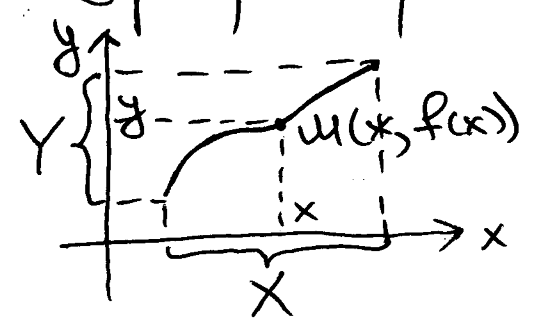
Переменную y, обозн-ую произв-~~ое~~ый ~~значение~~ элемент из Y наз-т зависимой перем-й в том смысле, что любое ~~зн-ие~~ число из Y всегда рассм-ся нами как частное значение $f(x)$ ф-ии f, отвеч-ее некоторому x из X

Говорят также, что переменная y зависит от перем-й x

Введём понятие графика ф-ии

~~Плоскость.~~ Сперва напомню, что пл-ть с введённой на ней декартовой сист-й коорд-т наз-ся координатной пл-ю. Тогда

График ф-ии $\equiv \{(x,y) \in XOY \mid x \in X, y = f(x)\}$ — мн-во всех точек коорд-й пл-ти XOY таких, что —и—



Приведённое мною описание понятия ф-ии не явл-ся опред-ем в строгом значении этого слова. Посмотрим вним-но на это описание. Согласно ему функция — это некоторый закон, правило или соотв-ие, обозн-ое какой-н буквой, напр, буквой f. Но дело в том, что все эти слова: закон, правило, соотв-ие и т.п. — лишь синонимы слова ф-я, они способствуют лучшему уяснению ею смысла, но не сводят к чему-либо более простому и первичному, как это должно было бы происходить в случае полноценного опр-я

В нашем описании понятия ф-ии мы уточнили лишь, что речь идёт о таком соотв-ии, при кот-м каждому зн-ю x отв-ет !-ое зн-ие y. Однако сделали мы это только для того, что полностью исключить двусмысл-ть трактовки описания. Уточнение о !-ти далеко не всегда вкл-ют в описание понятия ф-ии, поскольку по умолчанию слова правило, закон и т.д. её предполагают. Т.е., если мы говорим, напр, что $\exists$ет закон, который каждому x ставит в соотв-ие нек-ое y, то имеем в виду, что каждому ~~y~~ x отвечает вполне опр-ое, т.е. !-ое зн-ие y

Так как же всё-таки обстоит дело с ~~опреде-лением~~ понятием функции? $\exists$-ют две возможности реш-я этого вопроса. Первая из них, которая фактически реализована нами, и которая реал-ся в большинстве руководств по анализу — это заявить, что понятие ф-ии явл-ся первичным и огран-ся его описанием и разъяснением вспомогат-х названий и обозн-й.

Вторая возм-ть, связанная с полноценным опр-м ф-ии, может быть реализована только в рамках теоретико-множеств-го подхода. Согласно этому подходу функция отождествляется со своим графиком, который, в свою очередь, рассм-ся как нек-ое мн-во упор-х пар вещ-х чисел. Т.о., как и следовало ожидать, ~~за~~ согласно теор-ко-множ-му опр-ю ф-я — это просто мн-во спец-го вида

Теперь дадим опр-я (уже полноценные!) огр-х функций и их верхних и нижних (в том числе точных) граней (все эти опр-я вводятся в полной аналогии с опр-ми огран-х мн-в и связанных с ними понятий)

Опр Ф-я $f(x)$ наз огр-й сверху на мн-ве X, если

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow f(x) \le M$$

и огран-й снизу, если

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow f(x) \ge m$$

При этом M наз-ся верхней, а m — нижней гранью ф-ии $f(x)$ на мн-ве X

Опр Ф-я $f(x)$ наз-ся огр-й на мн-ве X, 2.18
если она огр-на на нём и снизу и сверху, т.е., если

$\exists\, m, M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow m \leq f(x) \leq M$

Пусть $A = \max\{|m|, |M|\}$

$\Rightarrow -A \leq f(x) \leq +A \Leftrightarrow |f(x)| < A$

и мы получим $\Leftrightarrow$ое опр-ие огр-го мн-ва:

$\exists A > 0 : \forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \leq A$

Очевидно, что огр-ть ф-ии (как сверху, так и снизу) $\Leftrightarrow$ на огр-ти мн-ва её значений с соотв-й стороны (для того, чтобы убедиться в этом, вспомните опр-ие огр-го мн-ва)

Дадим опр-я точных граней ф-ии

Опр Наименьшая из верхних граней ф-ии $f(x)$, огр-й сверху на мн-ве X, наз её точной верхней гранью на этом мн-ве и обозн-ся

$\sup\limits_X f(x)$

Точная нижняя грань опр-ся ан-но (обозн $\inf\limits_X f(x)$)

Легко убедиться в том, что (проверьте сам-но)

$\sup\limits_X f(x) = \sup Y$, $\inf\limits_X f(x) = \inf Y$, где Y - мн-во зн-й ф-ии $f(x)$

(эти $=$ва сл-ет понимать в том смысле, что если $\exists$ет $\sup Y$, то $\exists$ет и $\sup\limits_X f(x)$ и наоборот, причём в случае сущ-ия они $=$ны друг другу)

Теперь видно, что предл-ое опр-ие кор-но (т.к. у огр-й ф-ии огр-но мн-во её зн-й, а у огр-го мн-ва (мн-ва зн-й) всегда $\exists$-т соотв-ие точные гр-и, а значит точные грани $\exists$-т и у самой ф-ии