Лекция 3

Дадим теперь кванторное опр-ие точной верхней грани

Опр $M = \sup\limits_X f(x)$, если

1) $\forall x \in X \Rightarrow f(x) \le M$, т.е. M – одна из верхних гр-й

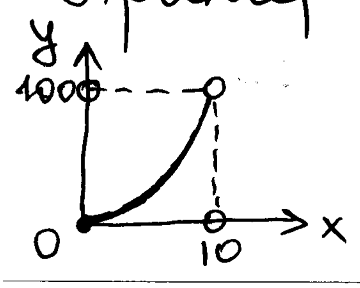
2) $\forall \tilde{M} < M \Rightarrow \exists \tilde{x} \in X : f(\tilde{x}) > \tilde{M}$ Иными словами $\forall$ число $\tilde{M}$, меньшее M – ~~уже~~ не верхняя грань, т.е. M – действ-но наим-ая из всех верх-х гр-ней

При этом подразум-ся, что $f(x)$ опр-на при всех x из X, т.е., что X, по крайней мере, – часть обл-ти опр-я ф-ии f ($X \subset D_f$)

Зам-ие. Конечно, можно было бы огран-ся соотн-ями: $\sup\limits_X f(x) = \sup Y$, $\inf\limits_X f(x) = Y$, сводящими понятие точных граней ф-ии к уже из-в-м нам понятиям точных гр-й числ-х мн-в – мн-в значений рассм-ой ф-ии. Но с практич-й точки зрения бывает удобнее пользоваться непосредств-м опр-м (не опираающимся на то или иное промежут-ое понятие)

Задание. Сформулир-те кванторные опр-я точной нижней грани отриц-я всех опр-й, относящихся к огр-ти ф-й

Пример Рассм-м ф-ю $y = x^2$ на пром-ке $[0, 10)$ (и только на нём). Мн-м её знач-й будет $Y = [0, 100)$



$\inf\limits_{[0,10)} x^2 = 0 \in Y \Rightarrow \min\limits_{[0,10)} x^2 = 0$

$\sup\limits_{[0,10)} x^2 = 100 \notin Y \Rightarrow \max\limits_{[0,10)} x^2$ не сущ-ет

В таком случае как наш, говорят, что ф-я $y=f(x)$ достигает (своей) точной нижней гр-и на мн-ве X, но не дост-т на нём точной верхней грани

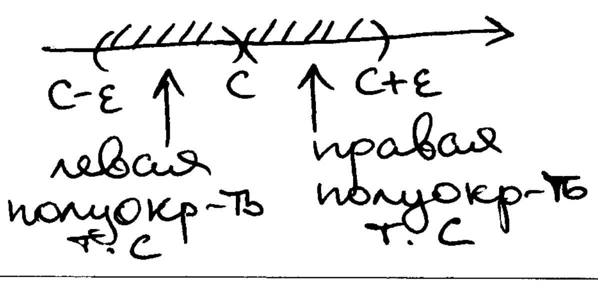
Очевидно, что достижение ф-й ~~в~~ своего inf-ма на мн-ве X равн-но сущ-ю min-го зн-я у этой ф-и на мн-ве X и ан-но достижение sup-ма $\Leftrightarrow$ сущ-ию max-го значения.

Причём, если сущ-т min-м, то он, естест-но, совпадает с inf-м, а если сущ-т max-м, то — с sup-м.

Т.о., max и min-~~ые~~ зн-я ~~ф-ии~~ даже у огр-х ф-й могут и не сущ-ть, а точные нижние и верхние грани огр-х ф-й всегда сущ-ют (являясь, как и в случае огран-х мн-в, ест-м обобщ-ем min-х и max-х значений)

§2 Опред-ие предела функции

Опр Проколотой ε-окр-тью т. c наз-ся мн-во $(c-\varepsilon, c)\cup(c, c+\varepsilon) \equiv \dot{O}_\varepsilon(c)$

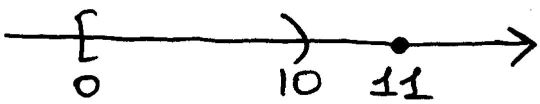


Т.о., проколотая ε-окр-ть точки предс-тав-т собой обычную ε-окр-ть точки у которой выколота (исключена) сама эта точка.
Т.е. мы как бы прокалываем ε-окр-ть в т. с

Заметим, что прокол-я ε-окр-ть явл-ся объедин-ем двух промежутков (точнее интервалов, наз-х левой и правой полуокр-ми т. с), но не явл-ся промеж-м в целом (из-за выкол-й точки)

Опр Число a наз-ся предельной т. (ой) мн-ва X, если в $\forall\ \dot{O}_\varepsilon(a)$ содерж-ся т-ки мн-ва X

Пример



$X = [0,10) \cup \{11\}$

т. 10 - пред-я точка для X, ибо

$\dot{O}_\varepsilon(10) = (10-\varepsilon, 10) \cup (10, 10+\varepsilon)$,

так что $\dot{O}_\varepsilon(10) \cap X \neq \varnothing$ $\forall$ даже сколь угодно малого ε

Ан-но $\forall x \in [0,10)$ - пред-я т. мн-ва X

А вот 11 не явл-ся пред-й т-й X, т.к., напр,

$\dot{O}_{0,5}(11) = (10{,}5; 11) \cup (11; 10{,}5) \cap X = \varnothing$

Т.о., мы видим, что пред-я т-ка мн-ва может ему и не $\in$-ть, и наоборот, т-ка, $\in$-ая мн-ву, может и не быть его пред-й т-й

Образно выражаясь, можно сказать, что т. a явл-ся пред-й т. мн-ва X, если мы можем подойти к ней сколь угодно близко по точкам мн-ва X, не наступая при этом на саму т. a

Тем самым, только для таких точек a мы можем ставить вопрос о том, стремятся ли значения функции к какому-л числу (пределу), ~~при неогр. ст.~~, т.е. приближаются ли они неограниченно к этому числу, при стремлении (неогранич-м приближении) аргумента x к точке a

Итак, пусть дана ф-я $y = f(x)$, опр-я на X

$y = f(x) : D_f = X$ и пусть a – пр-я т. X

обл-ть опр-я будет ещё и по Гейне (Хайне)

<u>Опр-ие предела ф-ии по Коши</u>

Число b наз-ся пределом функции $f(x)$ в т. a (при $x \to a$), если

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 :$

$$\forall x : \boxed{\begin{matrix} 1)\ x \in X \\ 2)\ x \neq a \\ 3)\ |x - a| < \delta \end{matrix}} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Зам-ие. Такая запись предполагает, что для каждого $\varepsilon > 0$ сущ-ет какое-то своё $\delta > 0$, удовлетв-ее последующим усл-м (т.е. разным ε отвечают, ~~во~~ в.г. (= вообще говоря), различные δ), поэтому δ по сути явл-ся ф-й ε, в связи с чем пишут $\delta = \delta(\varepsilon)$. Но в самом опр-ии нет необх-ти явного указания на такую зави-

мость, поскольку подразум-ся, что ∀-я | 3.5
перем-я, перед которой стоит квантор ∃-я, зависит от всех упоминавши-ся до неё перем-х, перед кот-ми стояли кванторы всеобщн-ти

В нашем случае квантор сущ-я стоит только перед δ, а до неё упоминается лишь одна перем-я ε (разум-ся, с квантором всеобщ-ти, поск-ку кв-ры ∃-я и ∀-ти должны чередоваться), поэтому и считаем, что $\delta = \delta(\varepsilon)$

Обозн-ие $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

или $f(x) \to b$ при $x \to a$

Зам-ие. Опр-ие предела по Коши часто наз-ют опр-м предела в терминах "$\varepsilon - \delta$"

Осознать, представить себе, что такое предел функции проще всего, опираясь на геом-ую иллюстрацию этого понятия. Прежде чем приводить эту илл-цию, выполним неск-ко несложных преобр-й

$$\left.\begin{matrix} 2) \\ 3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underbrace{0 < \overbrace{|x-a|}^{x \neq a}} < \delta$$

$$-\delta < x - a < +\delta \quad \Big\} + a$$

$$a - \delta < x < a + \delta$$

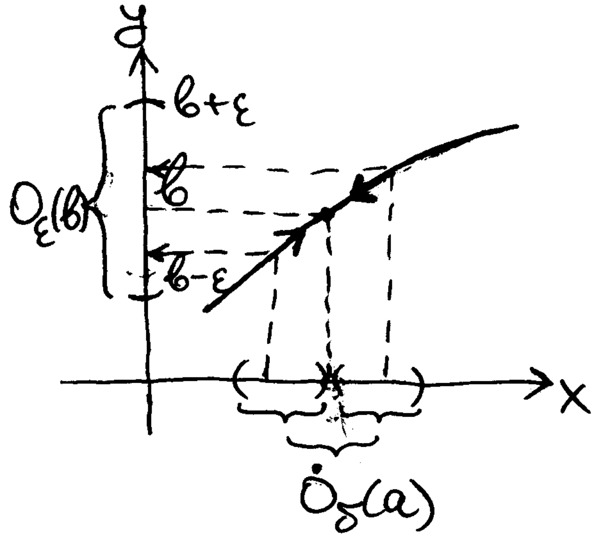
$$\Rightarrow x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) = \dot{O}_\delta(a)$$

(в опр-ии ε окр-ти может исп-ся вместо буквы ε любая другая, напр, δ)

Ан-но $|f(x) - b| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in O_\varepsilon(b)$

(мы допускаем, что $f(x)$ совпадает с b)

3.6



Пусть для простоты $D_f=(-\infty,+\infty)$ (так что условие 1) проверять не треб-ся)

Тогда согласно опр-ю предела ф-ии, мы хотим, чтобы $\forall \varepsilon>0$ (в опр-ии имеется прежде всего в виду — для любого сколь угодно малого полож-го ε), нашлось такое $\delta>0$, чтобы при (для любых) $\forall x$ из прокол-й окр-ти соотв-ие зн-я ф-ии гарантир-но попадали в ε-окр-ть т. b

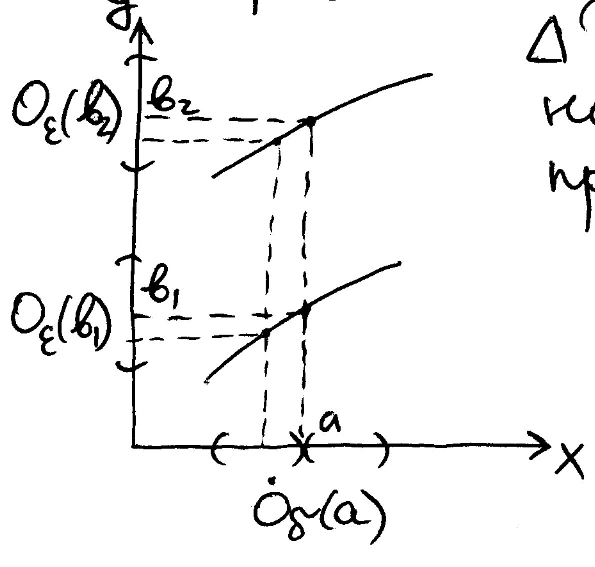
Иными словами мы хотим, чтобы (последующие слова оформляются как геом-ое опр-ие пр-ла)

Геометрическое опр-ие предела функции

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, если $\forall$ (сколь угодно малой) $O_\varepsilon(b) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, \dot{O}_\delta(a): \forall x\in \dot{O}_\delta(a)\cap X \Rightarrow$ (соотв-ее зн-ие ф-ии) $f(x)\in O_\varepsilon(b)$

только озвучивать

Утв-ие. Ф-я $y=f(x)$ может иметь не более одного предела в т. a



Δ Док-во проведём от противного с опорой на геом-ое опр-ие пред-го зн-я ф-ии

Предпол-м, что b_1 и b_2 — два различных предела ф-ии в т. a (т.е. $b_1\neq b_2$)

Пусть $\varepsilon>0: O_\varepsilon(b_1)\cap O_\varepsilon(b_2)=\varnothing$

Тогда из опр-я предела вытекает, что

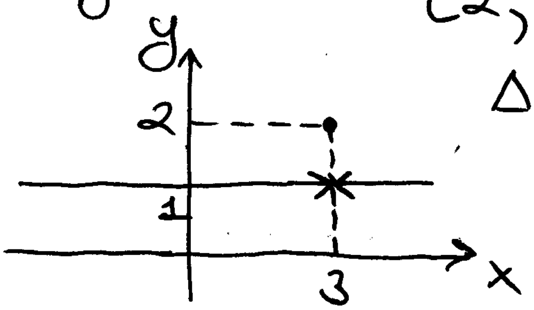
$\exists \dot{O}_\delta(a): \forall x \in \dot{O}_\delta(a) \cap X \Rightarrow$ ← обл-ть опр-я

$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \in O_\varepsilon(b_1) \\ f(x) \in O_\varepsilon(b_2) \end{cases}$ невозможно (см. рисунок), чтобы $f(x)$ одновремен-но им было

– противоречие, ⇒ а значит выдвинутое нами предпол-ие неверно $\Rightarrow b_1 = b_2$, т.е. функция всегда имеет только один предел

Примеры

1) Пусть $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 3 \\ 2, & x = 3 \end{cases}$ Док-ть, что $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$



△ Согласно опр-ю

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 :$ $\boxed{\text{нек-е усл-я}}$ опр-ые
должно

Оказ-ся в этом простейшем случае (почти пост-ая ф-ция) величину δ можно выбрать единой сразу для всех ε. Более того, в кач-ве δ можно взять совершенно ∀-ое полож-е число. Проверим, что это действ-но так, положив δ(ε) тождест-но равным, напр, 1/2

≡-во и $\stackrel{def}{=}$ одновр-но ($\stackrel{def}{\equiv}$)

Итак, пусть $\delta(\varepsilon) \equiv 1/2$ (т.е. δ в нашем случае реально от ε не зависит)

После того, как мы выбрали δ, нам надо убедиться в том, что

$\forall \varepsilon > 0$ и $\forall x : \begin{cases} x \in X = \mathbb{R} \quad \text{(всегда)} \\ \underbrace{0 < |x-3|}_{а} < \underbrace{1/2}_{б} \end{cases} \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

(∃δ не пишем, т.к. мы его уже выбрали)

далее будем опираться на 1-ое нер-во (второе нам не понадоб-ся)

Но $\forall x: |x-3|>0$, т.е.: $x\neq 3 \Rightarrow f(x)=1 \Rightarrow$ | 3.8

$\Rightarrow |f(x)-1| = |1-1| < \varepsilon$ при $\forall \varepsilon>0$ ⊠

Из этого примера хорошо видно, что предельное зн-ие ф-ии вовсе не обязано совпадать с частным. Образно выраж-сь, сущ-ие предела ф-ции в т.а означает, что при неогр-м приближении зн-й арг-та к т.а (но при таком приб-ии, при кот-м x всё время не совпадает с а) соотв-ие зн-я ф-ии неогр-но прибл-ся к нек-му числу в (в частности, вполне могут и всё время совпадать с в, как в рассм-м примере). В самой же т.а ф-я при этом может быть равной чему угодно (в том числе вообще быть неопр-й)

Дополнительно

Заметим также, что если бы при построении опр-я предела мы не исключали из рассм-я т.а (в кот-й ищется предел), то в случае примера 1 предел ф-ии в т.3 не $\exists$-ал

Т.о., включение т.а при построении опр-я предела ф-ии в число допустимых зн-й пер-й x привело бы к сокращ-ю кол-ва ф-й, имеющих пред-ое зн-ие в данной т-ке, что, в свою очередь, крайне негативно отразилось бы на развитии дальнейших идей матем-го анализа

② Док-ть, что $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)=5$

Δ ~~Итак~~ Нам надо показать, что

$\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists\, \delta(\varepsilon)>0:$ $\boxed{\text{усл-я}}$

Каким взять $\delta(\varepsilon)$? Собственно, док-ть, что предел $\exists$-ет, точнее, что он равен нек-му числу ~~и~~ означает док-ть, что такая ф-я $\delta(\varepsilon)$ сущ-ет, т.е. док-ть что сущ-ет ф-я $\delta(\varepsilon)$, которая каждому полож-му числу ε ставит в соотв-ие такое пол-ое число δ, при кот-м выполн-ся сформул-ые после двоеточия усл-я. Проще всего док-ть, что такая ф-я $\exists$-ет – это предъявить её в явном виде (отметим, что подобных ф-й, если они сущ-ют, всегда ∞ много). В некоторых сложных случаях, однако такое предъяв-ие по тем или иным причинам невозможно (или крайне затруднит-но) и тогда приходится огр-аться док-м (как правило не тривиальным) того, что искомая ф-я $\delta(\varepsilon)$ в принципе сущ-ет

К счастью, в нашей задаче всё достат-но просто и мы можем в кач-ве $\delta(\varepsilon)$ взять

$$\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{3}$$

Проверим выпол-ие соотв-х усл-й при данном δ

Итак,

$\forall \varepsilon > 0$ и $\forall x: \begin{cases} 1) \ x \in X = \mathbb{R} \\ 2) \ 0 < \underbrace{|x-1|}_{a} < \varepsilon/3, \end{cases} \Rightarrow$ ← теперь нам достаточно только второго нер-ва

$\Rightarrow |\overbrace{2x+3}^{f(x)} - \underset{b}{5}| < \varepsilon$

$2|x-1| < \varepsilon$

$|x-1| < \varepsilon/2$

Но из того, что $|x-1| < \varepsilon/3 \Rightarrow |x-1| < \varepsilon/2$ $\triangle$

Зам-ие. Разум-ся, в кач-ве $\delta(\varepsilon)$ можно было взять и $\varepsilon/2$, а вот положить его равным, скажем, просто ε мы уже не имеем права. Я взял $\delta = \varepsilon/3$ лишь для того, чтобы подчеркнуть, что при док-ве $\exists$-я предела мы вовсе не обязаны выбирать max-но возможное из допустимых знач-й δ. В нашем примере выбор конкретной величины δ из возм-х абсол-но не принцип-ен, однако иногда искусственное занижение зн-я δ, выбор его, так сказать, с некоторым запасом по малости, может приводить к значит-му упрощ-ю док-ва выполнения соотв-х усл-й из опр-я предела ф-ии. В ~~подобных~~ таких случаях подобное дополнит-ое уменьшение δ весьма рационально

*: На самом деле я просто не хотел, чтобы док-во выглядело чересчур тавтологично, т.е. чтобы не получилось, что из $|x-1| < \varepsilon/2 \Rightarrow |x-1| < \varepsilon/2$,

а всё, что написано выше – это хоть и в принципе верное, но специально придуманное объяснение

Док-м теперь утв-ие об огран-ти ф-ии, имеющей предельное зн-ие. Для этого сперва уточним, что мы будем подраз-ть под ф-ми, огран-ми в окр-ти нек-й точки. (Проблема в том, что мы определили понятие огр-ти ф-ии лишь на множ-х, явл-ся частью её обл-ти опр-я X, в то время как рассм-ая ф-я может быть опр-на не при всех x из окр-ти $O_\delta(a)$, т.е. $O_\delta(a)$ может и не быть частью мн-ва X: $O_\delta(a) \not\subset X$. Для такого случая и необх-мо данное уточнение, обобщающее понятие огран-ти ф-ии f(x) на случай мн-в, не являющ-ся частью обл-ти опр-я f(x).)

Опр Ф-я f(x) наз-ся огранич-й в $O_\delta(a)$ (т.е. в δ-окр-ти т. a), если она огр-на на $O_\delta(a) \cap X$

Дополн-но

Зам-ие. Это опр-ие естест-м образом обобщ-ся на случай огр-ти ф-ии на произвольном мн-ве E: ф-я наз-ся огр-й на мн-ве E, если она огр-на при любых знач-х арг-та из этого мн-ва ~~(т.е. огр-на на E∩X)~~

Напоминаю, что под словами ∀-ые зн-я арг-та подраз-ся ∀x ∈ обл-ти опр-я X. Тем самым ф-я считается огр-й на мн-ве E, если она огр-на на пересечении E∩X

Утв-ие. Если ф-я $f(x)$ имеет предел в т. a, то она огр-на в нек-й окр-ти этой точки | 3.12

Δ Обозначим через b предел $f(x)$ в т. a. Тогда, согл-но опр-ю предела

$$\forall O_\varepsilon(b) \Rightarrow \exists \dot{O}_\delta(a): \forall x \in \dot{O}_\delta(a) \cap X \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(b)$$

проколотая окр-ть!

Т.о., $\underset{m}{\underbrace{b-\varepsilon}} < f(x) < \underset{M}{\underbrace{b+\varepsilon}}$, ← при $x \neq a$

где ε – $\forall$ пол-ое число (далее считаем его фиксированным)

Рассм-м два случая

1) Если $a \notin X$, то огр-ть док-на, поскольку

$m < f(x) < M$ при $\forall x \in \dot{O}_\delta(a) \cap X = O_\delta(a) \cap X$

ибо X всё-равно не содержит т. a

2) Пусть теперь $a \in X$. Тогда для завершения док-ва положим

$m = \min\{b-\varepsilon, f(a)\}$
$M = \max\{b+\varepsilon, f(a)\}$

и заметим, что нер-ва

$m \leq f(x) \leq M$ будут выполнены и при $x = a$, а значит и при всех $x \in O_\delta(a) \cap X$

(Я написал здесь нестрогие нер-ва, т.к. при $x = a$ одно из них вполне может обра- щаться в рав-во)

Наконец, построим отрицание ~~прогр-я~~ опр-я предела ф-ии, т.е. построим опр-ие того, что $b \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Согласно общему правилу по-

строения отр-й имеем
$\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq b$, если
$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta(\cancel{\varepsilon}) > 0 \Rightarrow$
даже если бы было указано (в отрицаемом опр-ии) след-т убирать, т.к. переменные, стоящие после квантора всеобщ-ти явл-ся произвольными (пусть и в нек-м диапазоне) и поэтому не могут явл-ся ф-ми других перем-х
$$\Rightarrow \exists \boxed{x : \begin{array}{l} 1)\, x \in X \\ 2)\, 0 < |x-a| < \delta \end{array}} : |f(x) - b| \geq \varepsilon$$
Зам-ие. Двоеточие после x носит технический характер и по смыслу отлич-ся от других двое-т-й опр-я (вообще-то :-ия и $\Rightarrow$-я должны черед-ся, а у нас два :-ия след-т подряд. Оно не замен-ся при переходе к отр-ю. Дело в том, что это :-ие просто указ-ет на обл-ть опр-я x — мы вынуждены его применить, поскольку эта обл-ть описыв-ся двумя соотн-ми. Если бы мы объед-ли их в одно, скажем $x \in X \cap \mathring{O}_\delta(a)$, то необх-ть в этом :-ии сразу же отпала. Т.о., данное :-ие — всего-навсего мостик, соед-й усл-я 1) и 2). Поскольку при переходе к отр-ю обл-ти принадл-ти пер-х не подверга-ются никаким измен-ям (напр, $\varepsilon > 0 \not\Rightarrow \varepsilon \leq 0$, $\delta > 0 \not\Rightarrow \delta \leq 0$ и т.д.), то и этот мостик остаётся

в первозданном виде)

Рассм-м ещё один пример — теперь уже на отр-ие предела ф-ии

③ Пусть $f(x) = \cos\frac{1}{x}$, $x \neq 0$

тем самым т. $0 \notin$ обл-ти опр-я X : $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Но очевидно, что число 0 явл-ся, тем не менее, пред-й т-й X

Док-м, что $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \varnothing$, т.е. не сущ-ет

Δ Воспольз-ся отр-м опр-я предела ф-ии и покажем сначала, что при $\forall b \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \cos\frac{1}{x} \neq b$ (т.е., что предел нашей ф-ии заведомо не явл-ся неотр-м числом)

Присмотримся повнимат-ее к отр-ю опр-я предела: в нём два кв-ра $\exists$-я — перед ε и перед x. Сл-но нам надо как-то подобрать значения обеих этих пер-х. Начнём с ε. Окаж-ся (это будет легко видно из послед-х рассужд-й) величину ε можно положить =й единице

Итак, пусть $\varepsilon = 1$. Тогда остаётся док-ть, что

$$\forall \delta > 0 \Rightarrow \exists x : \begin{matrix} \cancel{1)}\, x \in X \Leftrightarrow x \neq 0 \\ 2)\ 0 < |\underbrace{x - 0}_{x}| < \delta \end{matrix} : \left|\cos\frac{1}{x} - b\right| \geq \underbrace{1}_{\varepsilon}$$

на самом деле $x = x(\delta)$, т.к. перед δ стоит кв-р всеобщности

Заметим, что $2) \Rightarrow 1)$, так что первая строчка больше не нужна: $\cancel{1)}$

3.15

Наша след-я задача подобрать $x(\delta)$ ($x(\delta)$ будет тем ближе к т. a, т. е. к нулю, чем меньше δ)

Выберем x в виде

$$x = \frac{1}{\pi(2k+1)}, \text{ где } k \in \mathbb{N}_0$$

(заметим, что x при таком выборе заведомо $\neq 0$)

Тогда с одной стороны при дост-но большом k модуль x, очевидно, может быть сделан меньше любого наперёд заданного δ:

при дост-но большом $k \Rightarrow |x| < \delta$,

а с другой стороны при любом таком $x \Rightarrow$

$$\left|\cos\frac{1}{x} - b\right| = |\cos(\pi + 2\pi k) - b| = |-1-b| =$$

$$= 1 + b \geq 1 = \varepsilon$$

в этом месте мы учли, что $b \geq 0$

Что, собственно, и треб-сь док-ть

Зад-ие. Док-те сам-но (это делается сов-но ан-но), что

$$\lim_{x \to 0} \cos\frac{1}{x} \neq b \leq 0 \quad \left(\forall b \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \cos\frac{1}{x} \neq b\right)$$

точнее, что

Это будет значать, что предел $\cos\frac{1}{x}$ в т. 0 не может быть ни ≥ 0, ни ≤ 0, т.е. не сущ-ет, и наше док-во, тем самым, будет полн-ю завершено

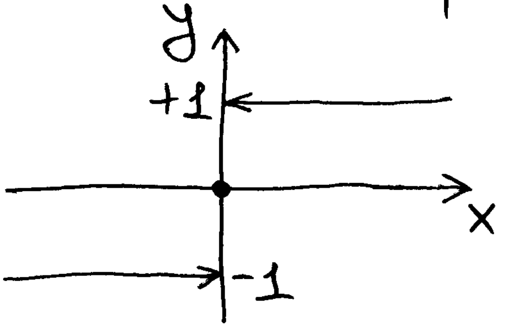
$\measuredangle$

Перейдём к опр-ю односторонних пределов

Односторонние пределы

Начнём с примера

(1) Рассм-м ф-ю $y = \operatorname{sign} x \equiv \begin{cases} +1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$

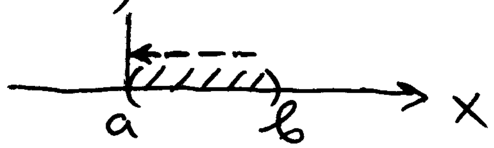


sign от лат. signum – знак

Из графика этой ф-ии видно, что при стремлении арг-та x к т. a слева и справа ф-я f(x) имеет разные пред-ые зн-я: слева – "–1", справа – "+1"

Дадим теперь точные опр-я левого и правого пред-х зн-й ф-ии

Пусть ф-я $y=f(x)$ опр-на в правой полуокр-ти (a,b) точки a: $(a,b)\subset D_f = X$, $b>a$



Это значит, что мы можем неогр-но приб-ся к т. a справа по точкам обл-ти опр-я ф-ии (и анализировать, стремятся при этом соотв-ие зн-я ф-ии к какому-либо числу)

Опр Число b наз-ся пределом ф-ии f(x) в т. a справа (при $x\to a+0$), если

$$\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists \delta>0: \forall x\in(a,a+\delta)\cap X \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$$

Здесь $(a,a+\delta)$ – правая δ-полуокр-ть т. a

Если потребовать, чтобы ф-я $f(x)$ была опр-на в левой полуокр-ти ~~т. а~~ (b,a) т-ки a: $(b,a)\subset X$, $b<a$, а в приведённом опр-ии усл-ие $x\in(a,a+\delta)\to$ $\to x\in(a-\delta,a)$, то получится опр-ие предела ф-ии $f(x)$ слева ~~в т. а ф-ии f(x)~~ в т. a **3.17**

Т.о., однострр-ие пределы отлич-ся от обычного предела только тем, что в их опр-ии вместо прокол-й окр-ти т. a фигурируют её соотв-ие однострр-ие окр-ти

Обозн-я

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=b \qquad f(a+0)=b$$
или совсем коротко
$$\lim_{x\to a-0} f(x)=b \qquad f(a-0)=b$$

$f(a+0)$ и $f(a-0)$ наз-ют также соот-но правым и левым пред-ми ф-ии в т. a

5 Рассм-м ф-ю

$$f(x)=[x]\equiv\max\{y\in\mathbb{Z}\mid y\le x\}$$

— максимальное из целых чисел y, не превосход-х данное число x (целая часть x)

Например $[9,9]=9$, $[2,(9)]=3$,

$[-1]=-1$, $[-1,4]=-2$

т.е. $[x]\le x$ $(\forall x)$
всегда

$\{x\}\equiv x-[x]$: $x=[x]+\{x\}$ — дробная часть x

3.18

$$9{,}9 = 9 + 0{,}9$$

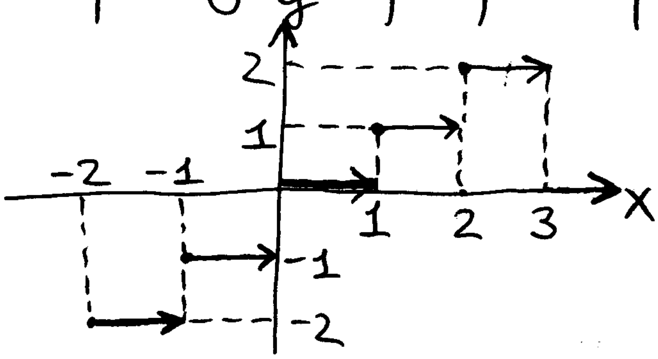
$$\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\shortparallel \;\;\;\;\;\; \shortparallel$$

$$\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;[x] \;\;\; \{x\}$$

$$\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\shortparallel \;\;\;\;\;\; \shortparallel$$

$$-1{,}4 = -2 + 0{,}6$$

Нарисуем график ф-ии $y=[x]$



Из графика видно (не будем это формализовывать), что

$f(2+0)=2$, $f(2-0)=1$,

$f(-1+0)=-1$, $f(-1-0)=-2$, на единицу меньше

и вообще

$f(n+0)=n$, $f(n-0)=n-1$

Теорема. Если у ф-ии $f(x)$ в т.a сущ-ют правый и левый пределы, причём

$$f(a-0)=f(a+0)=b,$$

то сущ-ет и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ (т.е. сущ-т и "общий" предел этой ф-ии в т.a)

Док-во непосред-но $\Rightarrow$ет из опр-я одностор-х пределов и остаётся в кач-ве самостоят-го упр-я

В будущем дать опр-я того, что $a+0$ и $a-0$ — пред-ые т-ки мн-ва X

Вдогонку — происхождение кванторов:

$\exists$ от EXISTS (сущ-ет; англ) $\forall$ от ALL (все, всё; англ)

отражаем переворачиваем