Лекция 4

Предел функции на ∞-ти

Дополн-но

Будем говорить, что

$+\infty$ – пред-я т. мн-ва X, если X неогр-но сверху

$-\infty$ – пред-я т. мн-ва X, если X неогр-но снизу

∞ – пред-я т. мн-ва X, если X неогр-но (т.е. неогр-но хотя бы с одной из сторон)

Пусть $f(x)$ задана на неогр-м сверху мн-ве X

$f(x)$: $D_f = X$ – неогр. сверху (т.е. пусть $+\infty$ – пред-я т-ка мн-ва X)

Образно выражаясь, это значит, что мы можем уйти на ∞ (точнее на $+\infty$) по точкам обл-ти опр-я X, т.е., иными словами, устремить аргумент x к ∞ пол-го знака. Тогда вполне естественно поставить вопрос о существовании предела ф-ии при неогр-м увеличении x

Опр Число b наз-ся пределом ф-ии $f(x)$ при $x \to \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists A \in \mathbb{R} : \forall x : \begin{matrix} 1) x \in X \\ 2) x > A \end{matrix} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Обозн-ие $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

Доп-но

мн-во $\{x \in \mathbb{R} \mid x > A\} = (A, +\infty)$ наз-~~ют~~ тся окр-тью (А-окр-тью) $+\infty$-ти

Если X неогр-но снизу, то заменяя в привед-м опр-ии (т.е. $-\infty$ его пр-я т-ка)

2) $x > A \to x < A$, получим $\lim\limits_{x\to-\infty}$

Если X ~~неогр~~ просто неогр-но (∞ – ~~его~~ пр-я т-ка), т.е. неогр хотя бы с одной из сторон (неважно с какой), то заменяя соотв-ий фрагмент опр-я ~~на~~

т.е. может быть неогр-но и с двух сторон

~~$-''-\ \exists A > 0 : \forall x :$ 1) $x \in X$ 2) $|x| > A$ $-''-$~~

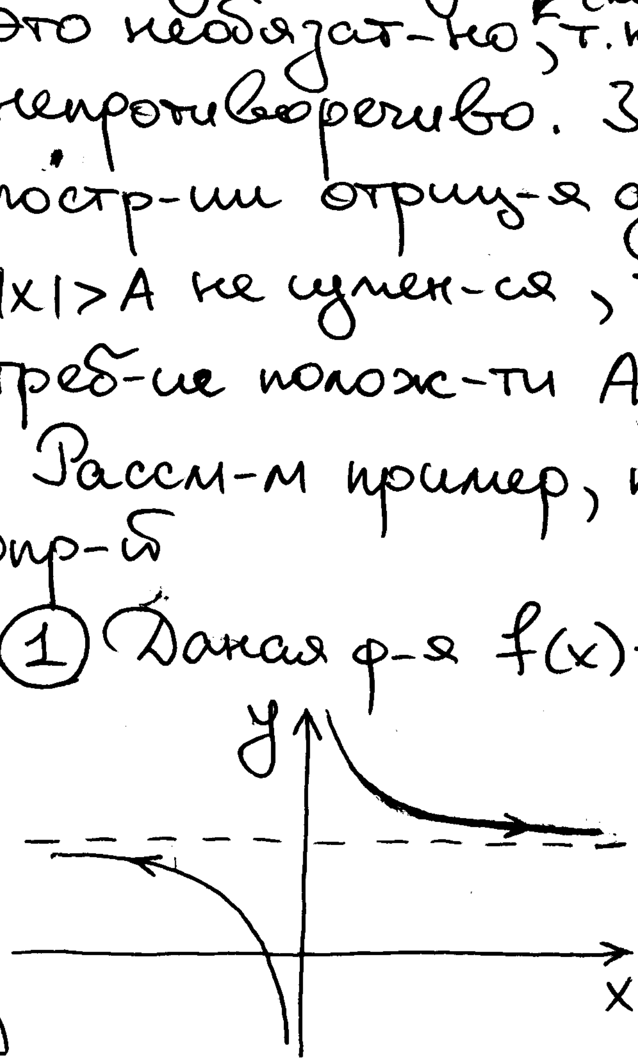
2) $x > A \to |x| > A$, получим $\lim\limits_{x\to\infty}$ в последнем определении

(Иногда ~~пишут~~ требуют, чтобы A было >0, но это необязат-но (хотя и нагляднее), т.к. ~~$|x|$~~ нер-во $|x| >$ отр числа непротиворечиво. Заметим также, что при постр-ии отриц-я данного опр-я ~~нер-ва~~ нер-во $|x|>A$ не измен-ся, так что и в этом случае треб-ие полож-ти A явл-ся излишним)

Рассм-м пример, проясняющий суть этих опр-й

(Дополн-но: хотя в случае отр-я его иногда применяют, т.к. оно позволяет нам не рассм-ть $A \le 0$ (техническое упрощ-ие – ср-те сходное с опр-ем б.б. ф-ии)

① Данная ф-я $f(x) = \frac{1}{x} + 2$



Из графика видно, что $f(x) \to 2,\ x \to +\infty$

Док-м это, опираясь на опр-ие предела на $+\infty$

Δ

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists A(\varepsilon) : \boxed{\text{усл-я}}$

Выберем $A(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$, ← Дальше станет ясно почему нас устраивает такое A

тогда

$\forall \varepsilon > 0$ и $\forall x$: $\begin{matrix} 2)\Rightarrow 1) \\ \cancel{1)}\ x \in X \Leftrightarrow x \neq 0 \\ 2)\ x > \frac{1}{\varepsilon}\ (=A) > 0 \end{matrix} \Rightarrow \Big|\overbrace{\frac{1}{x}+2}^{f(x)}-\underbrace{2}_{в}\Big| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon}$

Но из того, что $x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon}$ Δ

Зад-ие. Док-те, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ (расписав опр-ие того, что такое $\lim\limits_{x\to-\infty}$ и подобрав ф-ю $A(\varepsilon)$)

Зам-ие. Если обл-ть опр-я X ф-ии $f(x)$ неогран-на только сверху, то $\lim\limits_{x\to\infty}$ совпадает с ~~пределом~~ $\lim\limits_{x\to+\infty}$, а если только снизу, то – с $\lim\limits_{x\to-\infty}$)

Если же X неогр-на ~~и~~ сверху и снизу, то $\lim\limits_{x\to\infty}$ может и не сущ-ть, даже несмотря на то, что каждый из односторон-х пределов (на ∞-ти) сущ-ет (разум-ся, это будет в том и только в том случае, ~~если~~ когда $\lim\limits_{x\to+\infty} \neq \lim\limits_{x\to-\infty}$)

Рассм-м важный частный случай предела ф-ии при $x\to+\infty$ – предел последоват-ти. Сперва дадим опр-ие самой последовательности

Опр Посл-ю наз-ся ф-я с обл-тью опр-я $X \equiv \mathbb{N}$ (т.е. опр-я на мн-ве натур-х чисел)

Итак, посл-ть – это ф-я $y = f(n)$, где $n \in \mathbb{N}$

Натуральный арг-т ф-ии f обычно записывают в виде нижнего индекса, т.е. | 4.4

$f(n) \equiv f_n$ ($f(n)$ обозн-ют через f с нижним индексом n)

при этом f_n наз-ют элементом посл-ти

Значения f_n можно распол-ть в порядке возр-я номера n, т.е. в виде ряда

$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots \equiv \{f_n\}$,

обозначаемого через $\{f_n\}$

Само ~~мн~~-во $\{f_n\}$ часто тоже наз-ют (числовой) посл-ю, хотя, строго говоря, это всего лишь мн-во значений посл-ти. Но так уже исторически и повсеместно сложилось

При этом исполь-ся след-ее соглашение

Если пишут $f(n)$, то подраз-ют посл-ть как ф-ю n

Если пишут f_n, то подраз-ют всего лишь эл-т посл-ти, т.е. частное зн-ие ф-ии f при нек-м n, а саму посл-ть в случае исполь-я нижних индексов рассм-ют и обозн-ют как мн-во всех её эл-в $\{f_n\}$

Зам-ие. Поск-ку мы рассм-м лишь числовые ф-ии, то соотв-но ~~на~~ пока что будем иметь дело только с числовыми посл-ми, точнее с посл-ми вещ-х чисел. Хотя, в принципе, можно рассм-ать посл-ти с какими угодно элем-ми, напр, посл-ть функ-ций или посл-ть апельсинов

Разум-ся, для обозн-я посл-й можно исп-ть не только f, но и $\forall$ другую букву. Более того, для обозн-я числ-х посл-й чаще всего исп-ся буква x

Перейдём к опр-ю предела посл-ти

Пусть дана посл-ть

$$\underbrace{x_1, x_2, \dots}_{} \equiv \{x_n\}$$

этот ряд иногда тоже закл-ют в $\{\ \}$, но это не обязат-но (и так понятно, что речь идёт о мн-ве всех x_n)

Поск-ку обл-ю опр-я посл-ти, рассм-й как ф-я n, явл-ся мн-во всех натур-х чисел (т.е. мн-во неогр-ое сверху), то можно поставить вопрос о существ-нии предела такой ф-ии при неогр-м увеличении аргумента, т.е. при $n \to \infty$. Итак, опр-ие

Опр Число a наз-ся пределом посл-ти $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

(вместо A обычно исп-т N, т.к. оно натур-но)

Обозн-ие: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$, $n \to \infty$

(поск-ку $\mathbb{N}$ неогр-но только сверху, то $\lim\limits_{n\to\infty}$ и

$\lim\limits_{n\to\infty}$ — одно и то же ← см. замеч-ие выше

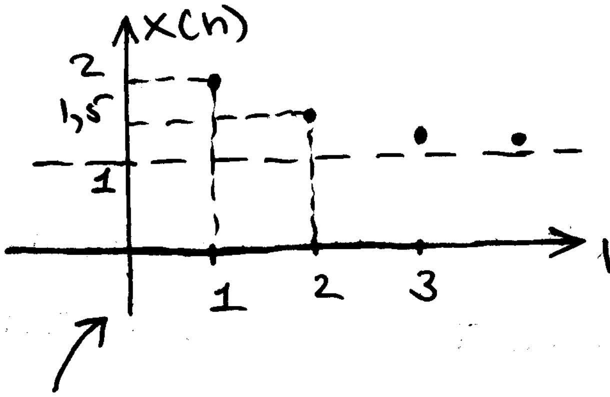
Опр Говорят, что посл-ть сх-ся, если lim сущ-ет и расх-ся, если не сущ-ет

Заметим, что у посл-ти предел может быть лишь при $n\to\infty$ (т.к. ∞ — ~~её~~ единств-ая ~~её~~ пред-я точка её обл-ти опр-я)

Рассм-м пример

② Док-ть, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$

$$\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}\equiv x_n(=x(n))$$



Геометр-ки это очевидно (можно было бы отметить всё и на одной оси x, спроецировав на неё это сем-ство точек)

Получается, что посл-ть точек $(n, x(n))$ неограни-нно приближ-ся к прямой $x=1$. От вас треб-ся строго это док-ть, исп-я сформул-ое опр-ие предела, т.е. вы должны будете подобрать $N(\varepsilon)$:

$$\forall\varepsilon>0 \text{ и } \forall n>N \Rightarrow |x_n-\cancel{a}\,1|<\varepsilon$$

§3 ∞но большие (б.б.) и ∞но малые (б.м.) ф-ии

Опр Ф-я $f(x)$ наз б.м. в т. a (при $x\to a$), если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$

Зам-ие. В этом опр-ии в кач-ве т. a могут выступать $a\pm 0$, а также ∞ удалённые точки (включая $\pm\infty$), т.е. вместо $x\to a$ можно писать $x\to a\pm 0, \infty, \pm\infty$ (в случае $\pm$ выбирается что-н одно: + или −; итого 5 альтернатив)

Примеры

③ Пусть $f(x)=2x-4$. Легко показать, что

$$\lim_{x\to 2}(2x-4)=0 \Rightarrow f(x) - \text{б.м. в т. } x=2$$

(в $\forall$ другой точке − не б.м.)

④ Пусть $f_1(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$, а $f_2(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

(при ~~рассм-ии~~ поиске предела ~~в т. x~~ мы не рассм-м зн-ие ф-ии в пред-й точке, т.е. при $x=0$)

$$\lim_{x\to 0} f_1(x)=0 \qquad\qquad \lim_{x\to 0} f_2(x)=1$$

б.м. (несмотря на то, что $f_1(0)\neq 0$) — не б.м. (хотя $f_2(0)=0$)

⑤ Пусть $f(x)=\frac{1}{x}$. Можно пок-ть, что

$$f(x)\to 0 \text{ при } x\to\left[\begin{array}{l}+\infty\\-\infty\\\infty\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow f(x) - \text{б.м. при } x\to\left[\begin{array}{l}+\infty\\-\infty\\\infty\end{array}\right.$$

Зам-ие. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, то пос-ть x_n также наз-ся б.м. ⌋ Например $\{\frac{1}{n}\}$ − б.м. пос-ть

Теперь сформул-м опр-ие того, что ф-я $f(x)$

явл-ся оено большой

Пусть $f(x)$: $D_f = X$ и пусть a – пр-я т. X

(или так: пусть a пр-я т-ка обл-ти опр-я X ф-ии $f(x)$)

Опр Ф-я $f(x)$ наз-ся б. б. в т. a (при $x \to a$), если

$$\forall M > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x : \begin{matrix} 1) x \in X \\ 2) 0 < |x-a| < \delta \end{matrix} \Rightarrow |f(x)| > M$$

Обозн $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

Доп-но

Писать $M > 0$ в принципе необязат-но. Легко пок-ть, что если вместо $\forall M > 0$ написать $\forall M \in \mathbb{R}$ (равно как и $\forall M \geq M_0$, где M_0 – абсол-но любое вещ-ое число), то существо опр-я останется прежним

При отриц-ии же опр-я получается, что

$\exists M > 0$: — " — $|f(x)| \leq M$

Однако и в этом случае нам ничто не мешает написать просто

$\exists M \in \mathbb{R}$: — " — $|f(x)| \leq M$

(ясно, что M автом-ки будет ≥ 0, кроме того нам ничто не мешает ~~выбо~~ искуственно выбрать его большим любого вещ-го числа M_0)

Тем не менее, условие $\forall M > 0$ придаёт опред-ю бóльшую наглядность (не меняя при этом его смысла) и, кроме того, несколько удобнее с технической точки зрения (ведь нам не надо тогда рассм-ать $M \le 0$), и поэтому весьма часто фигурирует в опред-х б.б. ф-й ~~(ми так-же~~ (в связи со всем вышесказанным мы также будем считать, что в опр-ии б.б. ф-ии вел-на M имеет пол-й знак)

Напомню, что

$$|f(x)| > M \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > +M \\ f(x) < -M \end{array}\right. \quad (\text{при } \forall \text{ знаке } M!)$$

Если в последнем опр-ии

$|f(x)| > M \nearrow f(x) > M \Rightarrow \lim = +\infty$
(при этом можно не писать, что $M>0$)

$\searrow f(x) < -M \Rightarrow \lim = -\infty$
($f(x) < M$, если не писать, что $M>0$, или наоборот требовать, чтобы $M<0$)

Пример 6

Док-м, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$ Пригодилось :)

Δ Возьмём $\delta(M) = \frac{1}{M}$ ($M>0 \Rightarrow \delta > 0$). Тогда

$\forall M>0$ и $\forall x$: 1) $x \ne 0$; 2) $0 < |x| < \frac{1}{M}$ $\Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| > M$

Но и того, что $|x| < \frac{1}{M} \Rightarrow \left|\frac{1}{|x|}\right| > M$ $\not\Delta$

$\{\forall M > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \boxed{\text{усл-я}}$

Ан-но тому, как это делалось для случая конечного предела, опр-ся ф-ии б.б. при $x \to a \pm 0, \infty, \pm\infty$

Задание: док-ть, что $\lim\limits_{x\to -0} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} 3\cdot x = +\infty$

Доп-но: Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ или $-\infty$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. Но если $\lim = \infty$, то он может $\neq$ ни $+\infty$, ни $-\infty$ (см. пример 6)

Теорема. Сумма и разность 2-х б. м. в т. a ф-й суть б. м. в т. a ф-ии

(суть = есть во множ-м числе, нельзя говорить есть ф-ии!)

Δ Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – б. м. в т. a

б. м.-ть $f(x)$ означает, что

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta_1 > 0 : \forall [x : 0 < |x-a| < \delta] \Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Для краткости $x \in X$ здесь и далее не пишем, но всегда подразум-ем

потому, что будет своё δ для ф-ии g

Замеч-ие к нер-ву $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$:

Поскольку соотв-ее δ_1 найдётся для совершенно любого пол-го ε, то оно, разум-ся, найдётся и для $\varepsilon/2$, каким бы малым ε не было (иначе получилось бы, что для $\varepsilon/2$ не найдётся)

Формально: (не приводить) $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall \varepsilon' > 0 \Rightarrow \exists \delta : \boxed{} < \varepsilon' \end{cases} \Rightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \exists \delta : \boxed{} < \frac{\varepsilon}{2} \right)$

Из б. м.-ти $g(x)$ сл-ет, что

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta_2 > 0 : \forall x : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Возьмём $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда

$\forall \varepsilon > 0$ и $\forall x: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x)| < \varepsilon/2 \\ |g(x)| < \varepsilon/2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |f(x) \pm g(x)| \underset{\text{всегда}}{\overset{\text{—0← подразу-ем}}{\leq}} |f(x)| + |g(x)| \underset{\text{в нашем случае}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

теперь понятно для чего $\varepsilon/2$

Но это и будет означать, что

$\lim\limits_{x \to a} f(x) \pm g(x) = 0$, т.е., что $f \pm g$ - б.м. в т.а $\blacktriangle$

Дополн-но

Конечно, при док-ве теоремы можно было треб-ть, чтобы $|f|$ и $|g|$ были $< \varepsilon$, тогда получилось бы, что $|f \pm g| < 2\varepsilon$. Для заверш-я док-ва осталось бы переобозн-ть 2ε через ε' и заметить, что ε', также как и ε, совершенно произв-ое пол-ое число

Замеч-ие. Сумма б.б. ф-й не обязат-но б.б. Напр $+\frac{1}{x}$ и $-\frac{1}{x}$ - б.б. в т.0, но $\frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{x}\right) \equiv 0$ - - б.м. в нуле

кроме $x=0$, но на этом не заострять

Теорема. Произв-ие ф-ии б.м. в т.а на ф-ю огр-ю в окр-ти т.а есть ф-я б.м. в т.а (теперь уже наоборот – писать суть нельзя!)

Δ Пусть $g(x)$ – ф-я, огр-я в окр-ти т.а и пусть (b, c) – эта окр-ть:

$g(x)$ – огр-на на $(b, c) \ni a$

Это значит, что   обл-ть опр-я

$\exists M>0 : \forall x\in(b,c)\cap X \Rightarrow |g(x)|\le M$

Пусть $f(x)$ – ф-я б.м. в т. a. Это значит, что

$\forall\varepsilon>0 \Rightarrow \exists\delta_1>0 : \forall x\in\{(a-\delta_1,a)\cup(a,a+\delta_1)\}\cap X \Rightarrow$

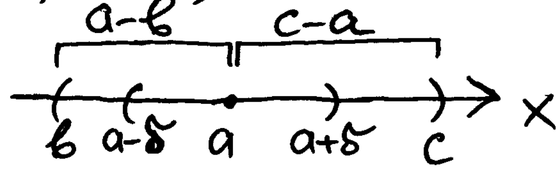
$\Rightarrow |f(x)|\le\frac{\varepsilon}{M}$ ← (то же самое, что и выше)

Положим $\delta=\min\{\delta_1, c-a, a-b\}$. Тогда

содержится в

$(a-\delta,a+\delta) \subseteq (b,c)$,

$\subseteq (a-\delta_1,a+\delta_1)$,



теперь понятно зачем ε/M

а след-но

→ ∈ и (c,b) и $(a-\delta_1,a)\cup(a,a+\delta_1)$

$\forall\varepsilon>0$ и $\forall x\in\{(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)\}\cap X \Rightarrow$

-0 ← формально имеем в виду

$$\Rightarrow \begin{cases}|g(x)|\le M\\ |f(x)|<\varepsilon/M\end{cases} \Rightarrow |g(x)\cdot f(x)| = |g(x)|\cdot|f(x)| < M\cdot\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

всегда   в нашем случае

Но это и означает, что

$\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot f(x)=0$, т.е., что $g\cdot f$ – б.м. в т. a ▲

След-ие. б.м. × б.м = б.м. (т.к. ф-я, б.м. в точке a, огр-на в нек-й окр-ти этой точки)

Задание. Док-те след-ее утв-ие

Утв. Пусть $f(x)\ne0$ при $x\ne a$. Тогда

1) если $f(x)$ – б.м. в т. $a \Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ – б.б. в т. a

2) если $f(x)$ – б.б. в т. $a \Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ – б.м. в т. a

О-символика

Пусть даны две ф-ции $f(x)$ и $g(x)$: $D_f = D_g = X$ (с общей обл-ю опр-я X) и пусть a – пр-я т. X

Опр $f(x) = \overline{\overline{o}}(g(x))$ в т. a (при $x \to a$), если сущ-ет $O_\delta(a)$:

$\forall x \in \dot{O}_\delta(a) \cap X \Rightarrow f(x) = \gamma(x) \cdot g(x)$,

где $\gamma(x)$ – б.м. в т. a ф-я

Пишут также $f = \overline{\overline{o}}(g)$ (читается о-малое от g) в т. a или $f(x) << g(x)$, $x \to a$

буква о (русск.)

$\overline{\overline{o}}$ ← подчёркивает малость

↑

о-малое

$\underline{\underline{O}}$ ← подчёркивает величину

↑

О-большое

При этом размер буквы не имеет значения

$\overline{\overline{O}}$ ← всё равно о-малое

$\underline{\underline{o}}$ ← всё равно О-большое

Примеры

1) $x^3 = \overline{\overline{o}}(x)$ в т. $x=0$

т.к. $\underset{f}{x^3} = \underset{\gamma}{x^2} \cdot \underset{g}{x}$ и $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, $(\underset{\text{б.м.}}{x} \cdot \underset{\text{б.м.}}{x} = \underset{\text{б.м.}}{x^2})$

б.м., б.м $\Rightarrow$ б.м.

т.е. x^2 – б.м. в т. $x=0$

Запишем по-другому:

$x^3 << x$ при $x \to 0$

(Пусть, напр, $x = 1/10^3$, тогда $x = 1/10^9$ и т.д.)

2) $x^3 \neq \overline{\overline{o}}(x)$ в т. $x=1$

т.к. $\underset{f}{x^3} = \underset{\gamma}{x^2} \cdot \underset{g}{x}$ и $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1 \neq 0$, т.е. x^2 – не б.м. в т. $x=1$

3) $x = \bar{\bar{o}}(1)$ в т. $x=0$

$\underset{f}{x} = \underset{\gamma}{x} \cdot \underset{g}{1}$ и $\gamma \to 0$ при $x \to 0$

Тем самым любая б.м. ф-я $f(x) = \bar{\bar{o}}(1)$:

$f(x)$ – б.м. в т. a $\Rightarrow$ $f(x) = \bar{\bar{o}}(1)$ в т. a

$(f(x) \to 0,\ x \to a) \longleftrightarrow (f(x) << 1,\ x \to a)$

(или, что то же самое:)

4) $x \neq \bar{\bar{o}}(x^3)$ в т. $x=0$

т.к. $\underset{f}{x} = \underset{\gamma}{\frac{1}{x^2}} \cdot \underset{g}{x^3}$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \neq 0$

Но $x = \bar{\bar{o}}(x^3)$ при $x \to \infty$

т.к. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Зам-ие. В привед-ом опр-ии вместо $x \to a$ можно писать $x \to a \pm 0, \infty, \pm\infty$

Рассм-ые примеры показывают, что (в случае, когда f и g – б.м. в т. a,) соот-н-ие $f = \bar{\bar{o}}(g)$ в т. a означает, что при $x \to a$ ф-я $f(x)$ в определ-м смысле стремится к нулю быстрее, чем ф-я $g(x)$. В связи с этим ясно, что если $f = \bar{\bar{o}}(g)$, то $g \underset{\text{заведомо}}{\neq} \bar{\bar{o}}(f)$ – сравните примеры 1) и 4) (единств-ое искл-ие – случай, когда $f \equiv g \equiv 0$)

Заметим также, что в опр-ии $\bar{\bar{o}}$-го ф-ии f и g совершенно произвольны в том смысле, что при стремлении $x \to a$ они могут вести себя как угодно. Могут стремиться к нулю, к отличному от нуля числу, к ∞ или даже вообще не иметь никакого предела (ни конечного, ни беск-го). Важно лишь, чтобы ф-я f была представима в виде произв-я g на б.м. ф-ю γ

Наконец, если $g(x) \neq 0$ при $x \neq a$ (кроме, имеется в виду, быть может, т. a), то усл-ие $f = \gamma \cdot g$ (того, что $f = \bar{\bar{o}}(g)$), можно переписать в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \gamma(x) = \text{б.м. в т. } a,$$

т.е. получаем, что

$$\underset{\text{в т. } a}{f = \bar{\bar{o}}(g)} \iff \frac{f(x)}{g(x)} \to 0, \ x \to a$$

$x=0$ при поиске предела не рас-см-ся, поэтому делить на x мы можем смело

Напр, $\underset{\text{в т. } x=0}{x^3 = \bar{\bar{o}}(x^2)}$, т.к. $\frac{x^3}{x^2} = x^2 \to 0$ при $x \to 0$

Прежде чем переходить к опр-ю $\underline{O}$-го, сфо-рм-ем одно вспомогат-ое опр-ие

Опр Ф-я $\gamma(x)$ наз-ся огр-й в т-ке a (при $x \to a$), если она огр-на в нек-й окр-ти этой точки

Зам-ие. При этом a может даже и $\notin D_\gamma$, но считается её пред-й точкой

Опр $f(x)=\underline{\underline{O}}(g(x))$ в т. a (при $x\to a$), если сущ-ет $O_\delta(a)$:

$\forall x\in \dot{O}_\delta(a)\cap X \Rightarrow f(x)=\gamma(x)\cdot g(x)$,

где $\gamma(x)$ – огр-я в т. a ф-я

В случае, когда f и g – б.м. в т. a и $f=\underline{\underline{O}}(g)$ в т. a, говорят ещё, что $f\to 0$ не медленнее (т.е. с той же скоростью или быстрее), чем g

Вообще из опр-й $\bar{\bar{o}}$-го и $\underline{\underline{O}}$-го видно, что из того, что $f=\bar{\bar{o}}(g)$ в т. a $\Rightarrow$-ет, что $f=\underline{\underline{O}}(g)$ в т. a (ибо если $\gamma(x)$ – ~~огр-на~~ б.м. в т. a, то она, как ф-я, имеющая предел при $x\to a$, ~~обязательно~~ заведомо огр-на в этой точке)

Заметим ещё, что в опр-ии $\underline{\underline{O}}$-го, также как и в опр-ии $\bar{\bar{o}}$-го, ф-ии f и g при $x\to a$ могут вести себя совершенно произв-но (быть б.м., б.б. и т.д.)

Если $g(x)\neq 0$ при $x\neq a$, то усл-ие $f=\gamma\cdot g$ (того, что $f=\underline{\underline{O}}(g)$) можно переписать в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\gamma(x)=\text{огр. в т. } a,$$

т.е. получаем, что

$$\cancel{f(x)=\underline{\underline{O}}}\ \underset{\text{в т. } a}{f=\underline{\underline{O}}(g)} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} - \text{огр. в т. } a$$

Примеры рассм-м в след-й раз