Лекция 5

Примеры

1) Покажем, что

$$2x^2+x^3=\underline{\underline{O}}(x^2) \text{ в т. } x=0 \text{ (при } x\to 0)$$

$$\underbrace{2x^2+x^3}_{f}=\underbrace{(2+x)}_{\gamma}\underbrace{x^2}_{g}$$

Заметим, что $\lim\limits_{x\to 0}\gamma(x)=2$, а значит γ заведомо огр-на в нек-й окр-ти т. $x=0$, т.е. согласно введённому выше опр-ю огр-на в т. $x=0$

Можно иначе

$$\frac{2x^2+x^3}{x^2}=2+x\to 2 \text{ при } x\to 0$$

$\Rightarrow 2+x$ – огр-на в т. $x=0 \Rightarrow 2x^2+x^3=\underline{\underline{O}}(x^2)$

Впрочем, проверить огр-ть $2+x$ в т. 0 можно и непосредств-но. Очевидно, что

$\forall x\in(-0{,}5;+0{,}5)\Rightarrow\gamma(x)\in(1{,}5;3{,}5)$ – огр-ое мн-во, т.е. $\gamma(x)$ – огр-на в $O_{0,5}(0)$ (0,5-окр-ти т. 0), а значит по опр-ю и в самой т-ке 0

2) Ан-но можно убедиться в том, что

$$2+3x=\underline{\underline{O}}(1) \text{ при } x\to 0$$

(Вообще любая огр-я в т. a ф-я $=O(1)$ в т. a)

Сравнение б.м.-х

Для случая, когда f и g - б.м. ф-ии, вводят дополн-ю классификацию

Прежде чем привести эту клас-ю введём понятие неопр-ти типа $0/0$

Итак, пусть $f(x)$ и $g(x)$ - б.м. в т.а ф-ии и пусть $g(x) \neq 0$ при $x \neq a$. Тогда

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \equiv \frac{0}{0}$ - естеств-ое обозн-ие, поскольку предел числ-я и знам-я - нуль

нау-ся неопр-ю типа $\frac{0}{0}$

$\frac{0}{0}$ - формальное обозначение: ясно, что на нуль всё равно делить нельзя (хотя на самом деле можно, но в рамках нестандартного анализа). Теорема о пределе частного в данном случае не работает, поскольку предел зн-ля $g(x)$ равен нулю

Величина этого предела зависит от ф-й f и g и может (при различном выборе этих ф-й) равняться чему угодно, в том числе предел может $= \infty$ и даже совсем не существ-ть. Поиск данного предела (или док-во его не $\exists$-ия) для конкретных ф-й f и g нау-ют раскрытием неопр-ти. Т.е.

раскрыть неопр-ть $\frac{0}{0}$ – это найти рас- **5.3**
см-ый предел или док-ть, что он не сущ-ет
(термин "раскрыть неопр-ть" ровно в таком
смысле употребляется и к неопр-м всех дру-
гих типов)

Далее, в случае, если $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} =$

$\overset{1)}{=}$ 0, то $f(x)$ нау-ся б.м. более высокого по-
рядка, чем $g(x)$ (в т. a) при $x\to a$

$\overset{2)}{=}$ $\forall b\neq 0$, то $f(x)$ и $g(x)$ нау-ся б.м. одного
порядка при $x\to a$

$\overset{3)}{=}$ 1, то и $f(x)$ и $g(x)$ нау-ся эквивалентными
б.м.-ми при $x\to a$

Рав-во 3) – частный случай рав-ва 2)

Заметим, что в случае

1) $f = \bar{\bar{o}}(g)$ 2) $f = \underline{\underline{O}}(g)$ 3) $f \sim g$

в соотв-ии с опр-ми О-симв-в новое обозн-ие

Напр, $x \sim x + x^2$ при $x\to 0$,

т.к. $\frac{x+x^2}{x} = 1 + x \to 1$

Некоторые св-ва символа $\bar{\bar{o}}$-ое (для слу-
чая б.м. ~~$f(x)$~~ f, g) в этом и след-х св-х

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – б.м. в т. a

1) $\bar{\bar{o}}(g) \pm \bar{\bar{o}}(g) = \bar{\bar{o}}(g)$ (~~здесь и ниже~~ все $\bar{\bar{o}}$-ые яв-ся $\bar{\bar{o}}$-ми в т. $x=a$)

т.е., если

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = \bar{\bar{o}}(g) \\ f_2 = \bar{\bar{o}}(g) \end{array}\right\} \Rightarrow f_1 + f_2 = \bar{\bar{o}}(g)$$

2) $\underbrace{\bar{\bar{o}}(\underbrace{\bar{\bar{o}}(g)}_{f})}_{h} = \bar{\bar{o}}(g)$

с использованием символа $\ll$ это соотн-ие становится ещё более наглядным

$f = \bar{\bar{o}}(g) \Leftrightarrow f \ll g$

$h = \bar{\bar{o}}(f) \Leftrightarrow h \ll f \ll g \Rightarrow h \ll g \Leftrightarrow h = \bar{\bar{o}}(g)$

вполне естест-но

3) $f \cdot g = \left[\begin{array}{l} \bar{\bar{o}}(f) \\ \bar{\bar{o}}(g) \end{array}\right.$

4) $f \sim g \Rightarrow f - g = \left[\begin{array}{l} \bar{\bar{o}}(f) \\ \bar{\bar{o}}(g) \end{array}\right.$

5) $\bar{\bar{o}}(c \cdot g) = \bar{\bar{o}}(g)$ (в том числе при $c = 0$)

6) $\bar{\bar{o}}(g + \bar{\bar{o}}(g)) = \bar{\bar{o}}(g)$

Справедл-ть ~~Док-во~~ св-в 1)-6) легко следует из опр-я символа $\bar{\bar{o}}$-ое и остаётся в кач-ве сам-го упр-я
их док-во

Зам-ие. Со всеми этими св-ми нужно быть очень осторожными, ибо они верны, вообще говоря, только в одну сторону — — слева-направо

Напр $\overrightarrow{x^2 = \overline{\overline{o}}(x)}$,

$x^3 = \overline{\overline{o}}(x)$, в т. $x=0$

— и —

(∞ много ф-й $= \overline{\overline{o}}(x)$)

Символ $\overline{\overline{o}}(x)$ означает мн-во всех ф-й более высокого порядка малости, чем x (поэтому лучше было бы писать $x \in \overline{\overline{o}}(x)$, а не $x = \overline{\overline{o}}(x)$, но принято писать именно равно)

Т.о., запись $x^2 = \overline{\overline{o}}(x)$ всего лишь означает, что x^2 принадл-т сем-ву таких ф-й (ф-й $\overline{\overline{o}}(x)$).

А вот если бы мы написали $\overline{\overline{o}}(x) = x^2$, то получилось бы, что любая ф-я $\overline{\overline{o}}$-ая от x есть именно x^2 (иными словами, что $\overline{\overline{o}}(x)$ обязательно равнялось x^2), что, разум-ся, неверно

Итак, мы видим, что $x^2 = \overline{\overline{o}}(x)$, но $\overline{\overline{o}}(x) \neq x^2$ отнюдь

Некоторые из ~~указанных~~ рав-в верны и для $\underline{\underline{O}}$-го. Я не перечисляю их сейчас, а буду приводить в дальнейшем по мере необходимости

Сравнение б.б.-х

Начнём с того, что введём понятие неопр-ти ∞/∞

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — б.б. в т. a ф-ии и пусть $g(x) \neq 0$ при $x \neq a$. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \equiv \frac{\infty}{\infty}$$

наз-ся неопр-ю типа $\frac{\infty}{\infty}$

Далее, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} =$

$=$
1) ∞, то говорят, что $f(x)$ имеет более высокий порядок роста, чем $g(x)$ при $x\to a$
2) $b\neq 0$, то говорят, что f и g имеют одинаковый порядок роста при $x\to a$
3) 0, то говорят, что $f(x)$ имеет более низкий порядок роста, чем $g(x)$ при $x\to a$

Раз-ся, если поменять в рав-ве 3) ролями f и g, то оно перейдёт в рав-во 1)

Заметим, что в случае

1) $g = \bar{\bar{o}}(f)$ 2) $f = \underline{\underline{O}}(g)$ и $g = \underline{\underline{O}}(f)$ 3) $f = \bar{\bar{o}}(g)$

в соотв-ии с опр-ми O-симв-в

Пример

$f = 1/x^2$, $g = 1/x$ $\to \infty$, $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f}{g} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$$

(условно говорят: $\frac{1}{0} = \infty$)

$\Rightarrow$ f имеет более высокий порядок роста, чем g при $x\to 0$ (стремится к ∞ быстрее)

$\exists$-ют и другие типы неопр-й:
$\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}
(все они могут быть сведены к неопр-ти типа $0/0$)

Например
$$\lim_{x\to 0} \underbrace{(1+x)}_{\to 1}^{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to\infty}} = 1^{\infty} \ (= e \text{ - раскроем позже})$$

$$\lim_{x\to 0} x^{x} = 0^{0} \ (= 1 \text{ - на семинарах})$$

—— " ——

§4 Св-ва пределов функций

Для док-ва теоремы об арифм-х опер-ях над ф-ми, имеющими пред-е значение, нам понадобятся два вспомогат-х утв-я, кот-е в таких случаях принято называть леммами (т.е. лемма – это вспомогат-ое, но в то же время дост-но важное утв-ие, необх-ое для док-ва нек-й теоремы или теорем)

Лемма 1 Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то $f(x) = b + \alpha(x)$ ~~$+\alpha(x)$~~, где $\alpha(x)$ – б.м. в т. a

Δ Представим $f(x)$ в виде
$$f(x) = b + \underbrace{[f(x) - b]}_{\equiv \alpha(x)} = b + \alpha(x)$$

Надо показать, что $\alpha(x)$ – б.м. в т. a **5.8**

Из того, что $f(x)\to b$ при $x\to a$, след-т, что

$\forall\varepsilon>0 \Rightarrow \exists\delta>0: \forall x\in \dot{O}_\delta(a)\cap X \Rightarrow |\underbrace{f(x)-b}_{\alpha(x)-}|<\varepsilon$,

т.е., что $|\alpha(x)| = |\alpha(x)-0|<\varepsilon$

Но это значит, что

$\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, т.е. $\alpha(x)$ – б.м. в т. a ▲

Лемма 2 (обратная) Если $f(x)=b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м. в т. a, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$

Δ Док-ть самост-но

Теорема (об арифм-х опер-х)

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$.

Тогда

1) $f(x)\pm g(x)\to b\pm c$, $x\to a$

2) $f(x)\cdot g(x)\to b\cdot c$, $x\to a$

3) если $\begin{cases} g(x)\neq 0 \text{ при } x\neq a \\ c\neq 0\end{cases}$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}\to\dfrac{b}{c}$, $x\to a$

$\Delta_{1)}$ В силу леммы 1

$f(x)\to b \Rightarrow f(x)=b+\alpha(x)$

$g(x)\to c \Rightarrow g(x)=c+\beta(x)$ – б.м. в т. a

Но тогда

$f\pm g = (b\pm c) + \underbrace{(\alpha\pm\beta)}_{\equiv\gamma(x)} = b\pm c+\gamma(x)$, где $\gamma(x)$ – б.м. в т.а. (т.к. по док-му ранее б.м. ± б.м. = б.м.), а значит согласно лемме 2 (обратной к лемме 1) **5.9**

$f \pm g \to b \pm c$, $x \to a$ (в пределе по лемме $\gamma(x)$ как бы исчезает)

$\Delta_{1)}$

$\Delta_{2)}$ док-ть самост-но

$\Delta_{3)}$ При рассмотрении предела отн-я $\frac{f(x)}{g(x)}$ (так же как и при рассм-ии пределов других арифм-х опер-й), подразум-ся, что f и g имеют общую обл-ть опр-я X и что a – пред-я т-ка X

$D_f = D_g = X$ и a – пр. т. X

Т.к. $\begin{matrix} f(x) \to b, \\ g(x) \to c, \end{matrix}$ то $\left.\begin{matrix} f = b + \alpha(x) \\ g = c + \beta(x) \end{matrix}\right\}$ б.м. в т.а

Рассм-м разность

$$\frac{f(x)}{g(x)}^{\backslash c} - \frac{b}{c}^{\backslash g} = \frac{(b+\alpha)\cdot c - b\cdot(c+\beta)}{(c+\beta)\cdot c} =$$

$$= \frac{1}{(c+\beta)\cdot c}\left(c\cdot\alpha(x) - b\cdot\beta(x)\right) = \frac{1}{c+\beta(x)}\underbrace{\left(\overset{\text{б.м.}}{\alpha(x)} - \frac{b}{c}\overset{\text{б.м.}}{\beta(x)}\right)}_{\equiv\gamma(x) \text{ - б.м.}}$$

Покажем, что ф-я $\frac{1}{c+\beta(x)}$ – огр-на в нек-й $O_\delta(a)$

Т.к. ~~$g(x)$~~ $\beta(x) \to 0$, $x \to a$, то

$\forall \underset{|c|/2}{\underset{\shortparallel}{\varepsilon}} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{O}_\delta(a) \cap X \Rightarrow |\beta(x)| < \underset{|c|/2}{\underset{\shortparallel}{\varepsilon}}$ $\boxed{5.10}$

Положим $\varepsilon = |c|/2$ и восп-ся нер-ми

$$|c+\beta| \underset{\text{всегда}}{\geq} |c| - \underbrace{|\beta|}_{<\varepsilon} > |c| - \varepsilon = |c| - \frac{|c|}{2} = \frac{|c|}{2} \underset{\text{т.к. } c \neq 0}{>} 0$$

Отсюда получаем, что

$$\left|\frac{1}{c+\beta(x)}\right| < \frac{2}{|c|} \text{ при } x \in \underset{(x \neq a)}{\dot{O}_\delta}(a) \cap X$$

Т.о.,

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} = \underbrace{\frac{1}{c+\beta(x)}}_{\substack{\text{огр-на в прокол-й} \\ \text{окр-ти т.}a}} \cdot \gamma(x) - \text{б.м. в т.}a$$

Поскольку при рассм-ии предела ф-ии мы не интересуемся её зн-ми в самой пред-й точке (т.а), то для спр-ти соотн-я

огр × б.м. = б.м.

вполне дост-но, чтобы первый из сомнож-й был огр-н лишь в проколотой окр-ти пред-й точки, т.е.

$$\underset{(x\neq a)}{\text{огр}} \times \underset{\text{в т.}a}{\text{б.м.}} = \underset{\text{в т.}a}{\text{б.м.}}$$

Дополн-но

⌈ Заметим, впрочем, что из огр-ти ф-ии в прокол-й окр-ти на самом деле мгновенно сле-д-т и огр-ть во всей окр-ти (напомню, что при док-ве одного из утв-й мы уже в этом убеждались)

Т.е., действуя немного иначе, можно было сначала заявить, что

$$\left|\frac{1}{c+\beta(x)}\right| \le \max\left\{\frac{2}{|c|}, \frac{1}{\underbrace{|c+\beta(a)|}_{|g(a)|}}\right\}$$ и при $x=a$, т.е. при $x \in O_\delta(a) \cap X$, уже без точки

а потом восп-ся утв-м

огр $\times$ б.м. $=$ б.м. (уже не искл-я т-ки a)

(и при $x=a$)

для разн-ти $\frac{f}{g} - \frac{b}{c}$

В итоге (в любом случае) имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} = \text{б.м.}, \text{ т.е. } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} + \text{б.м.},$$

а значит согласно лемме 2

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{b}{c} \text{ при } x \to a$$ $\boxtimes_{3)}$

Теорема об арифм-х операц-х полн-ю док-на

Зам-ие. Теорема об ариф-х оп-х справ-ва и при $x \to a \pm 0, \infty, \pm\infty$

Рассм-м примеры, илл-ие возм-ое применение док-й теоремы

1) $\lim\limits_{x\to a} c \cdot f(x) = \lim\limits_{x\to a} c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$, где c — const, $\lim\limits_{x\to a} c = c$

Т.е. получается, что const-у можно выносить за знак пред-го перехода

2) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+1) = \lim\limits_{x\to a}(2(x\cdot x)) + \lim\limits_{x\to a} 1 =$

$= 2\lim\limits_{x\to a} x \lim\limits_{x\to a} x + 1 = 2a^2+1$ (как и можно было ожидать)

(это элем-но док-ся с помощью опр-я предела)

Дополн-но

Результаты примера 2) несложно обобщ-ся на случай произвольной рац-й дроби

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – многочлен степени n
– многочлен степени m

– наз-ся рац-й функцией или рац-й дробью

Утв $\lim\limits_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}$, если $Q_m(a)\neq 0$

(непосредств-ое сл-ие теоремы об арифм-х оп-х)

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-3)} =$

при поиске предела x счит-ся $\neq 2$

$= \frac{2}{2-3} = -2$

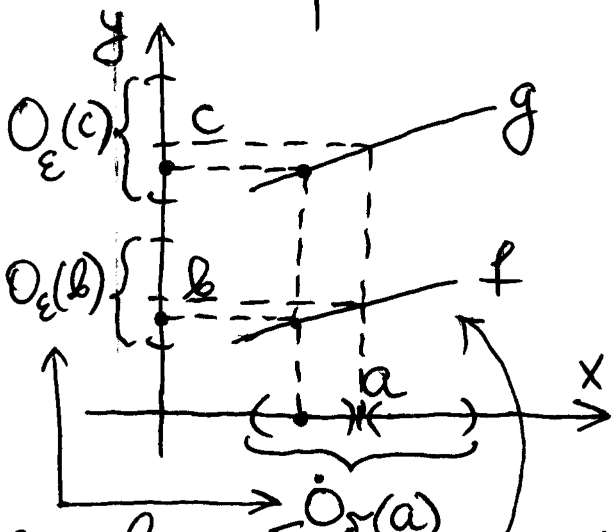
в полной аналогии с примером 2) (впрочем, согласно общей формуле привед-й выше, ~~на~~ после сокращ-я на x-2 на место можно сразу подставить ~~2)~~ число 2)

Теорема (о предель-м переходе в нер-х)

Если $f(x)\to b$, $g(x)\to c$ при $x\to a$ и $f(x)\geq g(x)$ при $x\neq a$, то $b\geq c$

Зам-ие. $f(x) \geq g(x)$ при $x \neq a$ означает $\boxed{5.13}$
$f(x) \geq g(x)$ кроме, быть может, т. a (т.е. в самой точке a ф-ии f и g могут быть связаны нерав-м любого знака, равно как и любая из них может быть не опред-на)

Δ От противного. Пусть $b < c$



Возьмём $\varepsilon > 0 : O_\varepsilon(b) \cap O_\varepsilon(c) = \varnothing$

Т.к. $f(x) \to b$, $g(x) \to c$ (иногда при $x \to a$ не пишут, если ясно из контекста), то

$\exists \dot{O}_\delta(a) : \forall x \in \dot{O}_\delta(a) \cap X \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \in O_\varepsilon(b) \\ g(x) \in O_\varepsilon(c) \end{cases} \Rightarrow$

сперва изобразить окр-ти

$\Rightarrow f(x) < g(x)$ (при этом $x \neq a$), что противоречит тому, что $f(x) \geq g(x)$ при $x \neq a$

(Мы рисуем график здесь, т.к. зн-я $f(x) \in O_\varepsilon(b)$ (то же самое для $g(x)$))

Зам-ие Теорема спр-ва и при $x \to a \pm 0$, ∞, $\pm\infty$

Частные случаи:

1) $g(x) \equiv c = \mathrm{const}$

Тогда $f(x) \geq c \Rightarrow b \geq c$

$(\leq)$ $\qquad$ $(\leq) \leftarrow$ ан-но для $\leq$

$\boxed{5.14}$

2) В роли $f(x)$ и $g(x)$ могут выступать пос-ти $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$. Тогда

$$\text{ну} \begin{cases} x_n \to b \\ y_n \to c \\ x_n \le y_n \end{cases} \Rightarrow b \le c$$

Зам-ие

$$\text{Если} \begin{cases} f(x) \to b \\ g(x) \to c \\ f(x) \underbrace{<}_{\text{строго меньше}} g(x) \end{cases} \not\Rightarrow b \underbrace{<} c \quad (b \overset{\text{всё равно}}{\le} c)$$

Контрпример

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \\ g(x) = \frac{2}{x} \end{cases} \quad f < g \begin{pmatrix} \text{считаем,} \\ \text{что } x > 0 \end{pmatrix}$$

Тем не менее, ~~Но~~ $\lim\limits_{x \to +\infty} f \overset{\text{не меньше!}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} g = 0$

(т.е. $b = c = 0$)

Но тогда, поскольку на выходе всё равно возникает нестрогое нер-во $b \le c$, то и в усл-ии теоремы писать $f < g$ вместо $f \le g$ не имеет смысла