Теорема (иногда лемма) о двух полицейских (новое "правильное" название в соотв-ии с законом о полиции; до 01.03.2011 г. н.э. – о двух милиционерах; до 01.03.1917 г. н.э. – о двух городовых)

Пусть $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$: $D_f = D_g = D_h \equiv X$ и пусть a – пред-я т. X (этого не всегда требуют, но всегда подразум-ют). Тогда, если

1) $f(x) \le g(x) \le h(x)$, $x \in X$,

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = b$,

то сущ-ет $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$

Зам-ие. Эту теорему иногда наз-ют теор-ой о 3-х полицейских, но это не правильно (т.к. тогда $g(x)$ – оборотень, а значит всё равно не настоящий полицейский)

полицейские — арестант

$$f \le g \le h$$

$$\searrow \ \downarrow \ \swarrow \qquad x \to a$$

$$b$$

Δ Из 2) след-т, что

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{O}_\delta(a) \cap X \Rightarrow \begin{cases} b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon \\ b - \varepsilon < h(x) < b + \varepsilon \end{cases}$$

Но тогда отсюда и из 1) вытекает, что

$b-\varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < b+\varepsilon$, т.е. $b-\varepsilon < g(x) < b+\varepsilon$, а последнее двойное нер-во и означает, что $\lim h(x)$ сущ-ет и равен b:

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ ∆

Дополн-но:

Зам-ие к теореме о двух милиц-х

В усл-ии теоремы мы требовали, чтобы

1) $f(x) \le g(x) \le h(x)$ при $\forall x \in X$ ← обл-ть опр-я

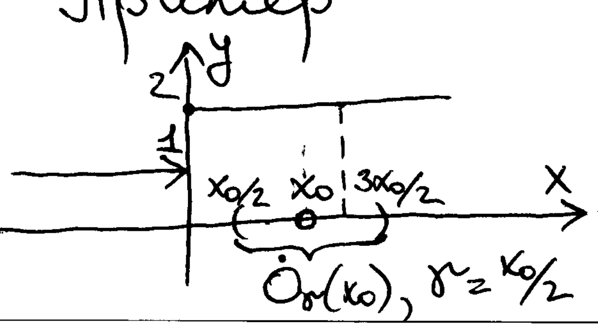
На самом деле вполне достат-но, чтобы это нер-во было выполнено лишь в нек-й проколотой окр-ти т. a, т.е. дост-но, чтобы

1) $f(x) \le g(x) \le h(x)$ при $x \in \dot{O}_r(a) \cap X$ $(r = const > 0)$

Это связано с тем, что ~~величины~~ существ-ие и величина пределов ф-й f, g и h не зависят от их значений в точках x, лежащих вне любой фиксир-й прокол-й окр-ти пред-й т-ки a:

$\lim\limits_{x\to a} f, g, h$ не зависит от того, чему $=$ эти функции при $x \notin \dot{O}_r(a) \cap X$

Пример

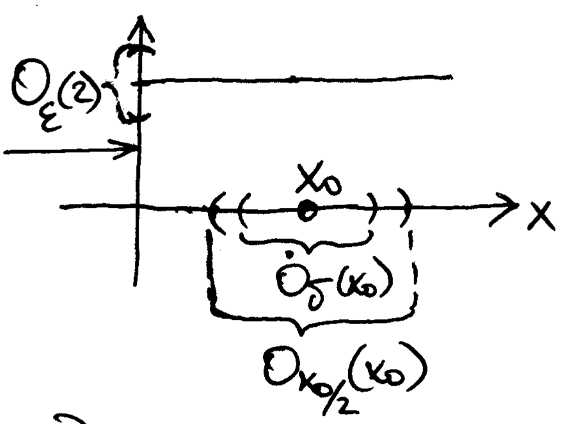


$$f(x) = \begin{cases} \cancel{1}\ 2, & x \ge 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

Ясно, что $\forall x_0 > 0$ (даже сколь угодно малого) $\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$

Это можно объяснить тем, что при поиске предела мы вправе рассм-ть ф-ю лишь при $x \in O_{\frac{x_0}{2}}(x_0)$ ("отбросив все остальные зн-я x). Но в этой окр-ти ф-я $\equiv 1$, а потому и её $\lim\limits_{x \to x_0} = 1$

А почему мы можем их отбросить? Да потому, что в опр-ии предела ф-ии мы вправе брать δ по своему усмотрению сколь угодно малым. В частности, можем считать δ малым настолько, чтобы $\dot{O}_\delta(x_0)$ (та самая, которая должна полностью проецир-ся на $O_\varepsilon(2)$) целиком помещалась в $O_{\frac{x_0}{2}}(x_0)$ (т.е. брать $\delta \le \frac{x_0}{2}$)



Это замечание распростр-ся^{и} на все теоремы и утв-я, относящиеся к пределам ф-й. Если в них утв-ся, что для сущ-я предела при $x \to a$ нек-я ф-я или ф-ии должны удовл-ть тем или иным усл-ям при $x \in X$ (или $x \in X$ и $x \neq a$), то на самом деле они могут удовл-ть этим усл-м лишь локально, т.е. лишь при $x \in \dot{O}_\delta(a) \cap X$ (спр-ть утв-й и теорем от такого сужения по той же причине, что и в разобранном выше примере, не страдает)

§5 Монотонные функции

Опр Ф-я $f(x)$ наз-ся

a) возраст-й
б) неубыв-й
в) невозр-й
г) убывающ-й

на мн-ве X, если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow$

$f(x_1) < f(x_2)$
$f(x_1) \leq f(x_2)$
$f(x_1) \geq f(x_2)$
$f(x_1) > f(x_2)$

Все ф-ии вида а)-г) наз-ся монотонными, а ф-ии видов а), г) ещё и строго монот-ми

Зам-ие. Из опр-я видно, что возр-я ф-я — частный случай неубыв-й, а убыв-я — частный случай невозр-й

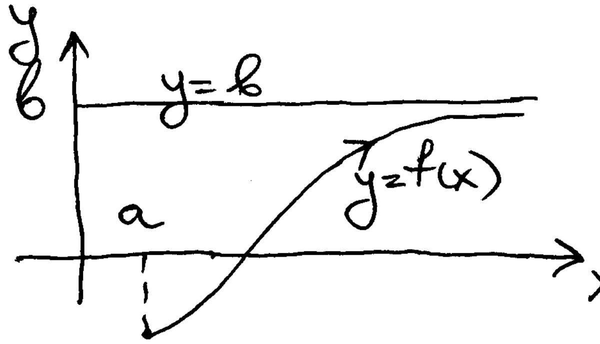
Примеры

1) $f(x) = x^2$ — (строго) возр-ет на полупрямой $[0, +\infty)$ (т.е. при $x \geq 0$)

2) $f(x) = \operatorname{sign} x$ — неубыв-т на $\mathbb{R}$ (всей вещ-й оси)

3) $f(x) \equiv 1$ — и не убыв-т и не возр-т на $\mathbb{R}$

Теорема. Если ф-я $f(x)$ не убывает и огр-на сверху на полупр-й $x \geq a$, то сущ-ет $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$



~~Справ-ть~~ Спр-ть утв-я ~~о сущ-нии~~ теоремы ~~этой~~ геометрически очевидна (но рисунок - не док-во)

Δ Прежде всего напомню, что огр-ть ф-ии на $[a,+\infty)$ на самом деле означает её огр-ть на $[a,+\infty)\cap X$: обл-ть опр-я $f(x)$

$$\begin{matrix} f(x) \text{ огр-на} \\ \text{сверху на } [a,+\infty) \end{matrix} \equiv \begin{matrix} f(x) \text{ огр-на} \\ \text{сверху на } [a,+\infty)\cap X \end{matrix} \Rightarrow \text{сущ-т sup}$$

$$\Rightarrow \text{сущ-ет } \sup_{[a,+\infty)\cap X} f(x) \equiv b$$

Док-м, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$

Надо пок-ть, что

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists A \in \mathbb{R} : \boxed{\text{усл-я}}$$

$$A(\varepsilon) = ?$$

Заметим, что при рассм-ии конкретных примеров мы, как правило, предъявляем $A(\varepsilon)$ в явном виде. Однако поскольку в теореме речь идёт об абстрактной ф-ии $f(x)$, мы докажем сущ-ие $A(\varepsilon)$, не предъявляя явного выраж-я для неё. При этом мы, разум-ся, будем опираться на условия, кот-м, **согласно** доказываемой теореме подчинена ф-я $f(x)$

Итак, док-м, что требуемая ф-я $A(\varepsilon)$ сущ-ет | 6.6

Для этого воспользуемся опр-ем точной верхней грани. Согласно данному опр-ю тот факт, что

$\sup\limits_{[a,+\infty)\cap X} f(x) = b$, означает, что:

1) $\forall x \in [a,+\infty)\cap X \Rightarrow f(x) \le b$

2) $\forall \tilde{b} < b \Rightarrow \exists\, \tilde{x} \in [a,+\infty)\cap X : f(\tilde{x}) > \tilde{b}$

далее не пишу, но везде подразум-ю

Заметим теперь, что

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow b - \varepsilon \equiv \tilde{b} < b \Rightarrow \exists\, \tilde{x} \in [a,+\infty) : f(\tilde{x}) > \tilde{b} = b - \varepsilon$

а из того, что $\tilde{b} < b$, согласно усл-ю 2) опр-я точной верх-й гр-и, в свою очередь следует, что

Но тогда, пользуясь транзитивностью знака $\Rightarrow$ ($\boxed{a \Rightarrow b \Rightarrow c} \Rightarrow \boxed{a \Rightarrow c}$), получаем, что

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \tilde{x} \in [a,+\infty) : f(\tilde{x}) > b - \varepsilon$

Подчеркнём, что $\tilde{x}$ тем самым $= \tilde{x}(\varepsilon)$

Вернёмся к искомой ф-ии $A(\varepsilon)$ и положим

$A(\varepsilon) \equiv \tilde{x}(\varepsilon)$ $(\forall \varepsilon > 0)$,

где $\tilde{x}(\varepsilon)$ - любая ф-я, удовл-ая предыд-й строке

Согласно опр-ю $\tilde{x}$ это будет означать, что

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow f(A) > b - \varepsilon$

Зам-ие. $\exists \tilde{x}$ (и тем более $\exists A$) мы ~~больше~~ уже не пишем, т.к. считаем, что $\tilde{x}(\varepsilon)$ – уже выбранная (т.е. фиксированная, конкретная) величина, удовлетв-ая нужному нер-ву, а навешивать квантор $\exists$-я на фиксиров-ю величину мы, строго говоря, даже не имеем права

Заметим также, что поскольку $\tilde{x} \in [a, +\infty)$, т.е. $\tilde{x} \geq a$, то и $A \geq a$

Далее, поскольку $f(x)$ не убывает на $[a, +\infty)$, то

$$\forall x > A \Rightarrow f(x) \geq f(A) > b - \varepsilon \Rightarrow f(x) > b - \varepsilon \quad (1)$$

Но с другой стороны из усл-я 1) (того, что $\sup f(x) = b$) и того, что $A \geq a$:

$(1) \; (\forall x \in [a, +\infty) \Rightarrow f(x) \leq b) + (A \geq a)$ озвучить

вытекает, что нер-во $\square$ тем более спр-во

$$\forall x \in [A, +\infty) \Rightarrow f(x) \leq b \quad (2)$$

Т.о., выходит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists A \; (\text{напр}, A = \tilde{x}(\varepsilon)):$$

$$\forall x: \begin{matrix} 1) x \in X \\ 2) x > A \end{matrix} \Rightarrow b - \varepsilon \overset{(1)}{<} f(x) \overset{(2)}{\leq} b \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - b \leq 0 \Rightarrow$$

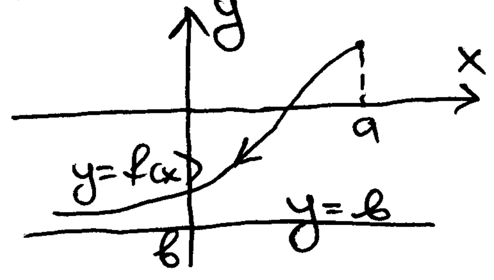
$$\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Но то, что здесь написано согласно опр-ю предела на $+\infty$ и означает, что

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b,$$

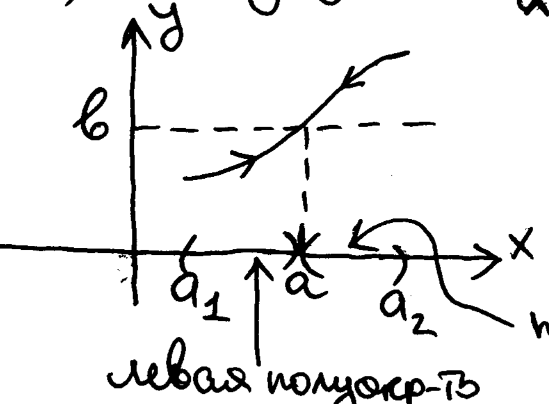
что, как я напоминаю, и треб-сь док-ть $\not\Delta$

Теорема. Если ф-я $f(x)$ не убывает и огр-на снизу на полупр-й $x \leq a$, то сущ-ет $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$



Док-ся полностью ан-но (можно не док-ть – лучше док-те след-ую теорему)

Теорема. Если ф-я $f(x)$ не убывает и огр-на сверху (снизу) в левой (правой) полуокрест-ти т. a, то сущ-ет $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ $\left(\lim\limits_{x \to a+0} f(x)\right)$



Из данного рисунка утв-ие этой теоремы тоже очевидно (но это также не док-во)

Δ Док-во во многом ан-но док-ву теоремы о сущ-ии предела при $x \to +\infty$ и остаётся в кач-ве самост-го упр-я (можно ограничиться док-ом только одного из двух случаев)

Задание. Сформулир-ть (и док-ть хотя бы для одного из вариантов) 4 варианта т-мы о существ-ии предела невозр-й ф-ии (при $x \to \pm\infty, a \pm 0$)

Важный частный случай

Пусть в роли $f(x)$ выступает посл-ть $x(n)$

(или, что то же самое, — $\{x_n\}$). Огр-ть и монотон-ть посл-ти означает её огр-ть и монотон-ть при всех натуральных n. Тогда получается след-й аналог для случая посл-й т-мы о ∃-ии предела на +∞ монотон-х ф-й

Теор Монотонная огран-я посл-ть сходится (напомню, что согласно опр-ю сход-ти это означает, что она имеет предел)

Зам-ие Рассм-м два возможных вида монотон-х посл-й

$x_1 \le x_2 \le \dots$ — неубыв-я — всегда огр-на снизу $\min\{x_n\} = x_1$

$x_1 \ge x_2 \ge \dots$ — невозр-я — всегда огр-на сверху $\max\{x_n\} = x_1$

Т.о., для неубыв-х посл-й: огр-ть ⟺ огр-ти сверху (снизу уже огр-ны), для невозр-х посл-й: огр-ть ⟺ огр-ти снизу (сверху уже огр-ны)

Важным примером применения посл-й теоремы служит след-ее утв-ие

Утв-ие Посл-ть $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходится

Зам-ие Это утв-ие будет использ-но впоследствии при док-ве сущ-я 2-го замечат-го предела

Δ Итак, док-м, что

сущ-ет (конечный) $\lim\limits_{n\to\infty} (\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{\to 1})^{n \to \infty} \equiv 1^{\infty}$ (предст-ий собой частный случай неопр-ти типа 1^{∞})

Напомню, что неопр-ть 1^{∞} в общем случае (т.е. в случае произвольного основания $\to 1$ и пока-ля $\to \infty$) может равняться чему угодно (точнее любому неотр-му числу, а также $+\infty$) или даже не сущ-ть

Рассм-м посл-ть $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ и покажем, что она возр-ет и огр-на сверху (подчеркну ~~напомню~~, что в соответствии со сделанным выше замеч-м возр-ие будет означать, что она уже огр-на снизу, напр. своим первым элементом x_1). Согласно сформул-й теореме об огран-х монотонных посл-х этого дост-но для сущ-ия (сущ-т) предела посл-ти $\{x_n\}$

будет след-ть (когда док-м возр+ +огр-ть сверху)

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^n \text{ — возр.} + \text{огр. сверху} \Rightarrow \text{сущ-т} \lim_{n\to\infty} x_n)$$

$\Downarrow$

(огр. снизу)

На лекции лучше док-ть лишь неубыв-ие, сделав после этого зам-ие о том, что можно док-ть и возр-ие (строгую монот-ть)

Для док-ва возр-я и огр-ти $\{x_n\}$ нам потребуется нер-во Бернулли:

$\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in [-1, +\infty) \Rightarrow (1+x)^n \geq 1 + nx$, **6.11**

причём ~~при~~ если этом $\begin{cases} x \neq 0 \\ n > 0 \end{cases} \Rightarrow (1+x)^n > 1 + nx$

Док-те самост-но, исп-я метод матем-й индукции (док-ть на лекции, если останется время, но его всё равно не останется, так что в лучшем случае – на ближайшей консультации)

Т.о., послед~~ее~~ующее док-во теор-ы разбивается на две части:

I) Док-во монотонности $\{x_n\}$

II) Док-во огранич-ти $\{x_n\}$

Δ_I Покажем, что $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ ($\Leftrightarrow x_{n+1} > x_n$ (т.к. $x_n > 0$) $\Leftrightarrow \{x_n\}$ – возр-я посл-ть)

[Этого **не** говорить:

$\{x_n\}$ – возраст-т, значит $x_{n_2} > x_{n_1}$ $\forall n_2 > n_1$ $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ – возр., значит $x_{n+1} > x_n$

Итак, расписываем отношение x_{n+1}/x_n:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$= \left[\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \frac{n+1}{n} = \left[\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \frac{n+1}{n} =$$

$= 1$

$$= \Big[1 \underbrace{- \frac{1}{(n+1)^2}}_{x}\Big]^{n+1} \frac{n+1}{n}$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} < 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{(n+1)^2} > -1,$$

а значит работает нер-во Бернулли, причём поскольку x заведомо отличен от нуля, а показатель $n+1>1$, то в этом нер-ве можно поставить строгий знак:

$(1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x$ ($>$, а не ≥ 0, т.к. $x \neq 0$, а $n+1>1$)

Отсюда, возвращаясь к отношению x_{n+1}/x_n, имеем

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \Big[1 + \cancel{(n+1)}\Big(-\frac{1}{(n+1)^{\cancel{2}}}\Big)\Big] \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+\cancel{1}-\cancel{1}}{n} \frac{n+1}{n} = 1$$

Δ_{I}

Δ_{II} (док-во огр-ти сверху $\{x_n\}$)

Рассм-м вспомогат-ю посл-ть

$$y_n = x_n \underbrace{\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)}_{>1} = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1} > x_n$$

Покажем, что $(\forall n \geq 2)$ предыд-й член больше след-го

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} > 1 \ \Big(\overset{\text{ибо } y_n>0}{\Longleftrightarrow} y_{n-1} > y_n \Leftrightarrow \{y_n\} - \text{убыв-я посл-ть}\Big)$$

Итак, расписываем отнош-ие y_{n-1}/y_n:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = \Big(\underbrace{\frac{n^2-1+1}{n^2-1}}_{>1}\Big)^n \frac{n}{n+1} =$$

$$= \Big(1+\underbrace{\frac{1}{n^2-1}}_{x}\Big)^n \frac{n}{n+1} > \Big(1+n\underbrace{\frac{1}{n^2-1}}_{>\frac{1}{n^2}}\Big)\frac{n}{n+1} >$$

нер-во Бернулли (строгое, т.к. $x\neq 0, n>1$)

$$> \Big(1+\frac{1}{n}\Big)\frac{n}{n+1} = 1$$

В результате из возр-я $\{x_n\}$, убыв-я $\{y_n\}$ и того, что $x_n<y_n\ (\forall n)$, получаем, что

$$\forall n \Rightarrow \underbrace{x_1<x_2<\ldots<x_n}_{\text{возр. }\{x_n\}}<\underbrace{y_n<y_{n-1}<\ldots<y_1}_{\text{убыв. }\{y_n\}}$$

в принципе дост-но и этих нер-в (левую часть для симметрии дописал)

Т.о., $\forall n \Rightarrow x_n<y_1$, т.е. $\{x_n\}$ действ-но ограничена сверху Δ_{II}

Док-во утв-я тем самым полностью зав-но Δ

Сделаем ряд важных замечаний, дополняющих док-ое утв-ие

Прежде всего заметим, что согласно своему опр-ю y_n представимо в виде произведения двух сход-ся посл-й

$$y_n = \underset{\text{сх-ся}}{\underset{\downarrow}{x_n}}\ \underset{1}{\underset{\downarrow}{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)}},$$

можно сразу: и равен $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

а значит $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ также сущест-т и равен произв-ию пределов:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} x_n \equiv e$$

Этот предел обозн-ют и называют латинской буквой e (так и говорят - число e)

Дополн-но

⌜Зам-ие Разум-ся, просто факт сущ-ия предела $\{y_n\}$ (без его рав-ва пределу $\{x_n\}$) следует и из того, что посл-ть $\{y_n\}$ убывает и огр-на снизу (напр, первым элем-м посл-ти $\{x_n\}$)

Далее заметим, что поскольку

$$\forall n \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{2} = x_1 < \underset{\substack{\downarrow \\ e}}{x_n} < \underset{\substack{\downarrow \\ 4}}{y_1 = 4}, \quad n \to \infty$$

$$2 \leq e \leq 4$$

← можно рассм-ть как пост-ую посл-ть

то e заведомо ≥ 2 и ≤ 4

Несложно получить и более точное приближение (~~напр~~, используя тот факт, что $x_n < e < y_n$):

$$e = 2{,}7\,\underbrace{1828}\,\underbrace{1828}\,4590\ldots$$

Запомнив его, вы одновременно запомните и год рождения Л.Н. Толстого!

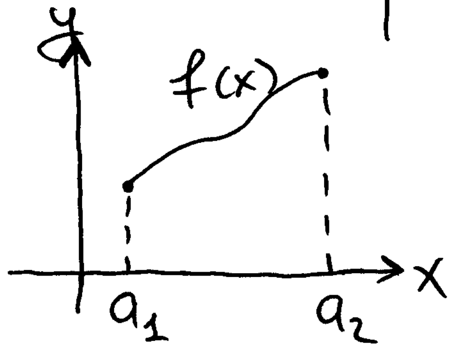
Кроме того, можно док-ть (только не пытайтесь сделать это самост-но — док-во весьма нетривиально!), что число e — иррац-но, т.е. явл-ся ∞-й непериод-й десят-й дробью

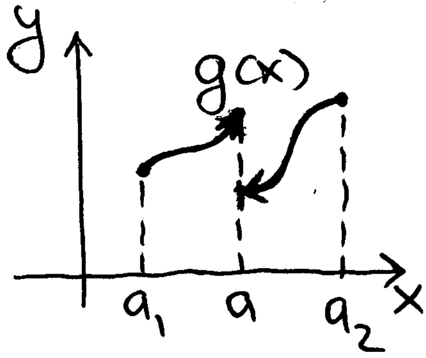
Глава III

Непрерывные функции

§1 Определение непрерывности

Наглядное представ-ие о непр-й и разр-й ф-ях дают непр-ые и разр-ые кривые — графики этих ф-й





Из привед-х рисунков видно, что ф-я f(x) непр-на при всех x из $[a_1, a_2]$, а ф-я g(x) - при всех x из $[a_1, a_2]$ кроме точки a. В точке a график ф-ии g(x) (а значит и сама эта ф-я) терпит разрыв

Дадим теперь точное опред-ие, формализующее наши интуитивные представления о непр-х ф-х

Пусть f(x) опред-на в нек-й окр-ти т.a:

$f(x): D_f \supset (a_1, a_2) \ni a$

Опр 1. Ф-я f(x) наз-ся непр-й в т.a (при x = a), если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

предельное зн-е   частное зн-ие

Иными словами, ф-я непр-на в т.a, если её пред-ое зн-ие в этой точке совпадает с частным

Заметим также, что непр-ть ф-ии в т. a фактически означает, что предел ф-ии (в т. a) = ф-ии от предела:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x),$$ ~~т.е.~~ что, в свою очередь естеств-но интерпрет-ть как возможность внесения символа $\lim\limits_{x\to a}$ в аргумент ф-ии f

Примеры

1) $f(x)=x^2$ – непр-на в $\forall$ т. $x=a$, т.к.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a} x \lim_{x\to a} x = a^2 = f(a)$$

2) Пусть $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ← мн-н степени n / ← многч-н степени m

Такую ф-ю наз-ют рац-ой ф-й или рац-й дробью

Очевидно, что рац-я ф-я непр-на в $\forall$ т. a, в которой её знамен-ль отличен от нуля (см. теорему об арифм-х опер-х над ф-ми, имеющими предельное зн-ие):

$f(x)$ – непр-на в $\forall$ т. $x=a$: $Q(a)\neq 0$, т.к.

$$\lim_{x\to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}$$