Лекция 7

Напомню, что на прошлой лекции было дано опр-ие непрерыв-ти ф-ии, согласно которому ф-я $f(x)$ непр-на в т. a, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Дадим ещё одно опр-ие непр-ти не использ-ее явным образом понятие предела (с технической точки зрения оно иногда более удобно)

Опр 2. Ф-я $f(x)$ наз-ся непр-й в т. a, если

$$\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists \delta>0 : \forall x : \begin{matrix} 1) x\in X \\ 2) |x-a|<\delta \end{matrix} \Rightarrow |f(x)-\underset{\uparrow\atop b}{f(a)}|<\varepsilon$$

Разум-ся Опр 1 $\Leftrightarrow$ Опр 2

Вспоминая опр-ие предела ф-ии по Коши, мы видим, что опр-ие 2 фактически представляет собой опр-ие того, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = b = f(a) \text{ (в роли предела в выст-ет } f(a))$$

Есть только одно (внешнее) отличие:

в опр-ии 2 (непр-ти ф-ии) мы не требуем, чтобы $|x-a|>0$, т.е., чтобы $x\neq a$ (как в опр-ии предела ф-ии). Дело в том, что это требование теперь явл-ся излишним, поскольку в т. $x=a$ нер-во $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ при любом положит-м ε заведомо спр-во:

$x=a \Rightarrow |f(x)-f(a)| = |f(a)-f(a)| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ 7.2

Хотя, конечно, если в опр-ии 2 вместо условия $|x-a|<\delta$ (не будет ошибкой) написать $0<|x-a|<\delta$ — существа опр-я это не изменит. Но с методической точки зрения >0 лучше не писать, т.к. иначе студенты могут подумать, что, это не случайно, и что $x=a$ (как и в опр-ии предела ф-ии) — "нечистая" точка

Док-ем одно важное утв-ие, назыв-ое устойчивостью знака **непр-й** ф-ии

Утв Если $f(x)$ непр-на в т. a и $f(a)\neq 0$, то сущ-ет $O_\delta(a)$, в кот-й $f(x) \gtrless 0$

это означает, что $f(x)$ либо >0, либо <0 всюду в $O_\delta(a)$ (говорят также, что $f(x)$ сохраняет знак в δ-окрест-ти т. a)

Δ Пусть $f(a)>0$. Воспольз-ся опр-ем 2 непр-ти ф-ии и положим в нём $\varepsilon = f(a)$. Тогда выходит, что

$$\exists \delta>0 : \forall x \in O_\delta(a) \cap X \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \overset{\varepsilon}{\downarrow}{f(a)}$$

без точки (т.к. мы допускаем, чтобы $x=a$)

$$\underbrace{-\cancel{f(a)} < f(x) - \cancel{f(a)}}< + f(a)$$

$\Rightarrow f(x)>0 \quad \forall x \in O_\delta(a)\cap X$ чтд

Случай $f(a)<0$ рассм-те самост-но $\blacktriangle$

Односторонняя непрерывность

Пусть $f(x)$ опр-на на полуотр-ке $[a, a+\delta)$, $\delta > 0$

$f(x): D_f \supset [a, a+\delta), \delta > 0$

Дополн-но: правая полуокр-ть

$[a, a+\delta) = \{a\} \cup (a, a+\delta)$

т.е. $[a, a+\delta)$ = т.a + правая полуокр-ть т.a

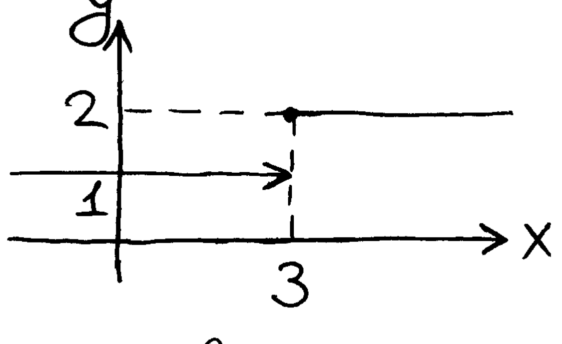
Т.о., можно было бы сказать: пусть ф-я $f(x)$ опр-на в т.a и правой полуокр-ти этой т-ки

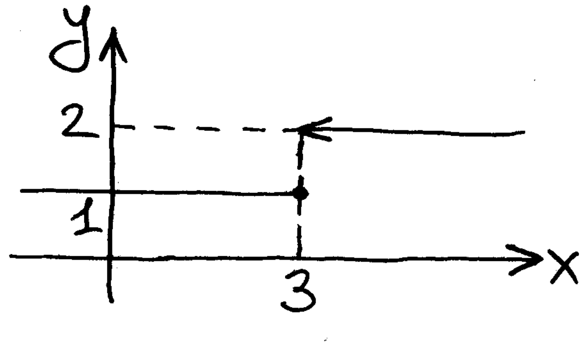
Опр Ф-я $f(x)$ наз-ся непр-й справа в т.a, если $f(a+0) = f(a)$

Ан-но опр-ся непр-ть слева в т.a

Пример

$$f_1(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 3 \\ 1, & x < 3 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 2, & x > 3 \\ 1, & x \leq 3 \end{cases}$$





Мы видим, что

$f_1(3+0) = 2 = f_1(3)$ – непр-на справа в т. $x=3$

$f_1(3-0) = 1 \neq f_1(3)$ – разрывна (терпит разрыв) слева в т. $x=3$

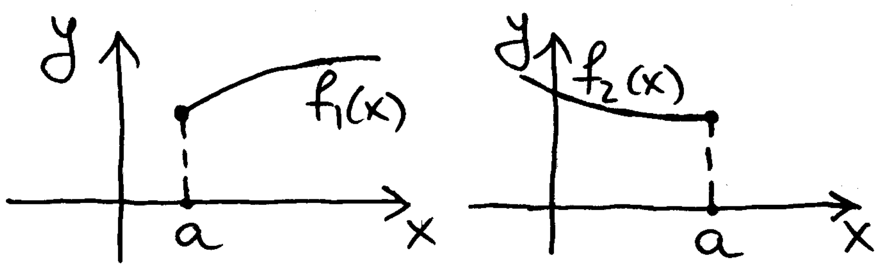
$f_2(3+0) \neq f_2(3)$ – разрывна слева

$f_2(3-0) = f_2(3)$ – непрерывна справа

Теор Если ф-я $f(x)$ непр. в т. a слева и справа, то она непр-на в т. a

Δ Док-ть самост-но

Зам-ие. Если ф-я $f(x)$ опр-на только справа от т. $x=a$ (т.е. только при $x \geq a$), то под непр-ю $f(x)$ в т. a подразум-ся непр-ть справа в этой точке (см. рис.). Соотв-но, если ф-я $f(x)$ опред-на только слева от т. $x=a$, то под непр-ю $f(x)$ в т. a подразум-ся непр-ть слева в этой точке (см. там же)



f_1 и f_2 считаются непрер-ми в т. a

Дадим теперь строгое опр-ие точки разрыва ф-ии

Опр Пред-я т-ка обл-ти опр-я ф-ии, в кот-й ф-я не явл-ся непр-й, наз-ся т-й разрыва ф-ии

Если a – т. разрыва ф-ии $f(x)$, то говорят, что $f(x)$ терпит разрыв или разрывна в т. a

Пусть дана ф-я $f(x)$. В предположении, что $D_f \equiv X \supset (a_1, a_2) \ni a$, т.е. в предп-ии, что ~~ее~~ $f(x)$ опр-на и слева и справа от т. a (такую т. a ещё наз-ют внутренней т-й обл-ти опр-я), введём классифик-ю т-к разрыва ф-ии $f(x)$

Классификация точек разрыва

0) Устранимый разрыв

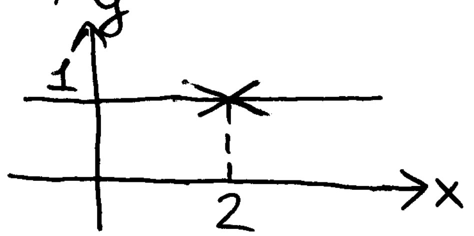
Опр Точка a наз-ся т-й устр-го разрыва ф-ции $f(x)$, если сущ-ет $\lim\limits_{x\to a} f(x) \equiv b$ (который обоз-начим через b), ~~но~~

но $\left[\begin{array}{l} f(a)=\varnothing \text{ — т.е. } f \text{ не опр-на в т. } a \\ f(a)\neq b \end{array}\right.$

Дополн-но:

$\left[\begin{array}{l} A \\ B \end{array}\right. \leftarrow$ либо A, либо B $\quad \left\{\begin{array}{l} A \\ B \end{array}\right. \leftarrow$ и A, и B

Пример $f(x)=\dfrac{x-2}{x-2}$, $x\neq 2$



$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$,

но $f(2)=\varnothing$

$\Rightarrow x=2$ — т-ка устр-го разрыва

В то же время $\forall a\neq 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=1=f(a)$, а значит $f(x)$ — непр. при $\forall x\neq 2$

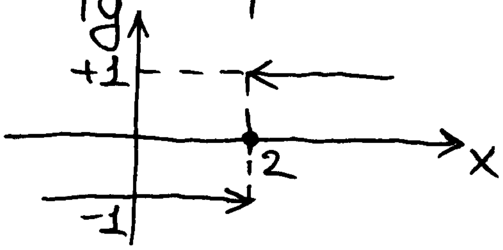
Зам-ие. Разрыв наз-ся устранимым потому, что его действ-но можно в некот-м смысле устранить, доопределив или переопред-в ф-ю $f(x)$ в т. a (её предельн-м зн-ем b)

Если в рассм-ом примере ф-ю $f(x)$ при $x=2$ положить =ой единице: $f(2)\equiv 1$, то получится ф-я непр-я на $\mathbb{R}$ (т.е. во всех точках вещ-й оси)

1) Разрыв I-го рода

Опр Точка a наз-ся т. разрыва I-го рода ф-ии $f(x)$, если сущ-ют $f(a-0)$ и $f(a+0)$, но $f(a-0) \neq$ $\neq f(a+0)$

Пример $f(x) = \operatorname{sign}(x-2)$



← график ф-ии $\operatorname{sign}(x-2)$ получается из графика ф-ии $\operatorname{sign} x$ сдвигом на 2 единицы вправо

$$f(2-0) = -1 \neq f(2+0) = +1$$

$\Rightarrow x = 2$ — т-ка разрыва I-го рода

Очевидно, что в любой другой т-ке (т.е. при $x \neq 2$) ф-я $f(x)$ непр-на

Заметим, что переопр-ть/~~доопр-ть~~ ф-ю $f(x)$ так, чтобы она стала непр-й и при $x=2$ теперь уже не получится. Мы можем лишь положить $f(2) \equiv +1$, сделав $f(x)$ непр-й справа в т. $x=2$, или пол-ть $f(2) \equiv -1$, сделав её непр-й слева в этой точке

2) Разрыв II-го рода

Опр Точка a наз-ся т. разрыва II-го рода, если в этой точке хотя бы один из одностор-х пределов не сущ-ет или равен ∞-ти

Пример

1) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$

$f(-0)=\varnothing$, $f(+0)=\varnothing$

Т. о., $x=0$ – т-ка разрыва II-го рода

2) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x>0\\ x, & x\leq 0\end{cases}$ $f(+0)=+\infty$, $f(-0)=0$

$\Rightarrow x=0$ – также т-ка разрыва II-го рода

Заметим, что доопред-ть или переопр-ть ф-ю f, имеющую в т. a разрыв II-го рода так, чтобы она стала непрер-й ~~хотя~~ с той стороны, с которой у неё нет конечного предела, уже невозможно

Можно сказать, что разрыв I-го рода в определ-м смысле сильнее устр-го разрыва, а разрыв II-го рода – сильнее разрыва I-го рода

§2 Свойства непрерывных функций

Сперва сформулир-м теорему об арифм-х операц-х над непр-ми ф-ми

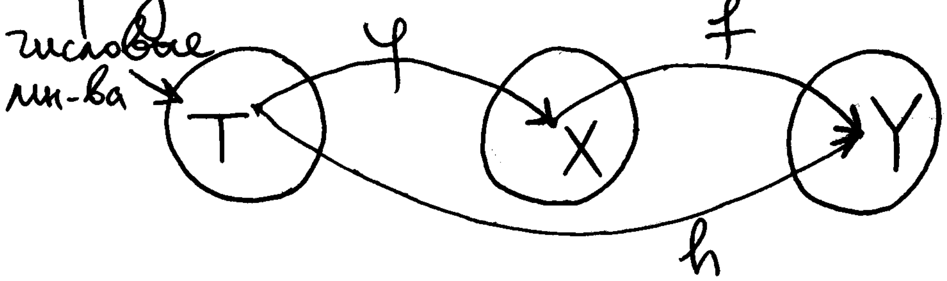
Теор Если ф-ии $f(x)$ и $g(x)$ непр-ны в т. a, то ф-ии $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, а ~~$f(x)/g(x)$~~ если $g(a)\neq 0$, то и $f(x)/g(x)$ также непр-ны в т. a

Δ Док-ть самост-но, используя опр-ие непр-ти и теорему об арифм-х опер-х над ф-ми, имеющими пред-ое зн-ие

Сложная функция

Пусть даны $x = \varphi(t): D_\varphi = T, E_\varphi = X$ и ф-я $y = f(x): D_f = X, E_f = Y$

Схематически это можно изобразить след-м образом



$T, X, Y \subset \mathbb{R}$

Говорят, что ф-я φ действует из T на X, а ф-я f - из X на Y

Если мы забудем о промежуточном мн-ве X и будем считать, что каждой т-ке мн-ва T сразу ставится в соотв-ие т-ка мн-ва Y, то получим новую ф-ю h, действ-ю из T на Y

Опр Ф-я $y = h(t)$, которая каждому $t \in T$ ставит в соотв-ие $y = f(x)$, где $x = \varphi(t)$, наз-ся сложной функцией аргумента t

Коротко пишут так:

$y = f(\varphi(t)) \equiv h(t)$

внешняя ф-я   внутренняя ф-я

Т.о., сложная ф-я h есть результат последоват-го применения двух "простых" ф-й φ и f (сперва φ, затем f), т.е. применения ф-ии f к результату ф-ии φ

Говорят также, что h явл-ся суперпозицией или композицией ф-й f и φ и пишут

$h = f \circ \varphi$

Пример

Ф-ю $y = \sin t^2$ можно представить как суперпозицию ф-й

$y = f(x) \equiv \sin x$ и $x = \varphi(t) \equiv t^2$

Действ-но:

$y = f(\varphi(t)) = \sin \varphi(t) = \sin t^2$

Из этого примера видно, что

$f \circ \varphi \not\equiv \varphi \circ f$

(вообще говоря, т.е. в том смысле, что для некоторых ф-й f и φ равенство может выполняться, однако сущ-ют и такие ф-ии f и φ, для кот-х оно не выполнено)

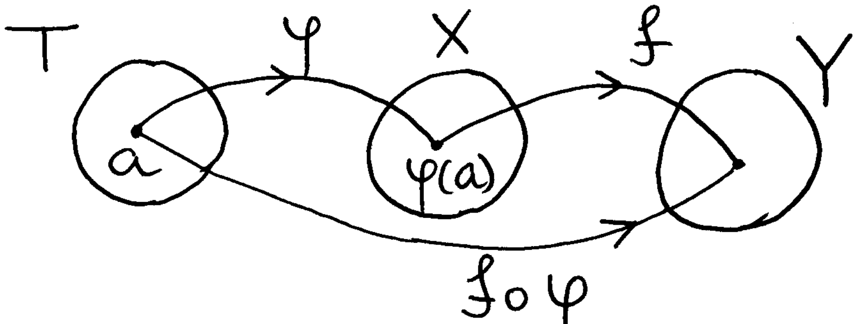
В самом деле:

не равно при всех t

$\varphi(f(t)) = f(t)^2 = (\sin t)^2 \stackrel{def}{=} \sin^2 t \not\equiv \sin(t^2) = f(\varphi(t))$

Сформулируем и докажем теорему о непр-ти сложной ф-ии

Теорема. Пусть ф-я $x=\varphi(t)$ непр-на в т. a, а ф-я $y=f(x)$ непр-на в т. $b=\varphi(a)$. Тогда сложная ф-я $y=f(\varphi(t))$ непр-на в т. a



Коротко: непр-я ф-я от непр-й – непр-на

Δ Нам надо док-ть, что

$$\lim_{t\to a} f(\varphi(t))=f(\varphi(a))$$

или, что

$$\forall\varepsilon>0 \Rightarrow \exists\delta>0:\ \forall t: \begin{matrix}1)\ t\in T\\ 2)\ |t-a|<\delta\end{matrix} \Rightarrow |f(\varphi(t))-f(\varphi(a))|<\varepsilon$$

Чтобы док-ть сущ-ие такого δ, воспользуемся непр-тью "простых" ф-й f и φ

Из непр-ти внешней ф-ии $f(x)$ в т. $b=\varphi(a)$ следует, что

$$\forall\varepsilon>0 \Rightarrow \exists\gamma>0:\ \forall x: \begin{matrix}1)\ x\in X\\ 2)\ |x-b|\leq\gamma\end{matrix} \Rightarrow |f(x)-f(b)|<\varepsilon$$

чтобы отличать от δ из опр-я непр-ти $f(\varphi(t))$

Заметим, что $\gamma=\gamma(\varepsilon)$

Далее, из непр-ти внутр-й ф-ии $\varphi(t)$ в т. a сл-ет, что

$$\forall\varepsilon_1>0 \Rightarrow \exists\delta_1>0:\ \forall t: \begin{matrix}1)\ t\in T\\ 2)\ |t-a|<\delta_1\end{matrix} \Rightarrow |\varphi(t)-\varphi(a)|<\varepsilon_1$$

Заметим, что $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1)$

$\varepsilon_1 = \gamma(\varepsilon)$

Положим теперь в последнем опр-ии $\varepsilon_1 = \gamma(\varepsilon)$. Мы имеем право это сделать, т.к. раз соотв-ее δ_1 найдётся для совершенно произвольных положит-х ε_1, то оно, разум-ся, найдётся и для любых знач-й ф-ии $\gamma(\varepsilon)$ (напомню, что эти знач-я по самому опр-ю $\gamma(\varepsilon)$ больше нуля)

В результате получим сложную ф-ю $\delta_1(\gamma(\varepsilon))$, которую обозначим через δ:

$\delta_1(\gamma(\varepsilon)) \equiv \delta(\varepsilon)$ - оказыв-ся, это и есть искомая ф-я $\delta(\varepsilon)$

Убедимся в этом. Согласно опр-ю $\delta(\varepsilon)$ и $\gamma(\varepsilon)$ получаем, что

1) $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall t$: 1) $t \in T$ 2) $|t-a| < \delta(\varepsilon)$ $\Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(a)| < \gamma(\varepsilon)$

$\delta(\varepsilon) = \delta_1(\gamma(\varepsilon))$

(см. опр-ие непр-ти φ)

$\Downarrow$

2) $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall x$: 1) $x \in X$ 2) $|x-b| < \gamma(\varepsilon)$ $\Rightarrow |f(x) - f(b)| < \varepsilon$

$f(x) = \varphi(t)$, $f(b) = \varphi(a)$

(см. опр-ие непр-ти f)

Из утв-я 1) мы видим, что при t, удовл-х усл-м 1) и 2)

$\Rightarrow \varphi(t)$: 1) $\varphi(t) \in X$ 2) $|\varphi(t) - b| < \gamma(\varepsilon)$

А значит $\varphi(t)$ может выступать в роли x, удовл-го усл-м утв-я 2), т.е. в утв-ии 2) мы можем положить $x = \varphi(t)$ (написано же $\forall x: \square \leftarrow$ и $\varphi(t)$ этому удовл-т — значит ничто не мешает взять $x \equiv \varphi(t)$)

Но тогда из строчек 1) и 2) вытекает, что:

$1)+2) \Rightarrow$ ~~$\forall \varepsilon > 0$ и $\forall t$: 1) $t \in T$ 2)~~

мы предъявили искомое $\delta(\varepsilon)$

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \;(\text{напр, } \delta = \delta_1(\gamma(\varepsilon))):$$

$$\forall t: \begin{matrix} 1)\; t \in T \\ 2)\; |t-a| < \delta \end{matrix} \Rightarrow |f(\varphi(t)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon \quad \Delta$$

(>0 мы теперь не пишем, т.к. мы выбрали $x = \varphi(t)$)

Дополн-ое разъяснение

Из того, что $\varepsilon > 0$ и $t: \square$, вытекает результат утв-я 1), кот-й рассм-ся нами как промежуточный и кот-й означает, что $\varphi(t)$ удовл-ет усл-ям утв 2). Но тогда из рез-та утв-я 1) ~~мгновенно сл-ет рез-т утв-я 2) с $x = \varphi(t)$~~ (а значит и из усл-й утв-я 1), поскольку именно они обеспечивают этот рез-т) мгновенно следует результат утв-я 2) с $x = \varphi(t)$ (его мы рассм-ем как оконгат-й). При этом промежуточный рез-т, т.е. рез-т утв-я 1) мы в заключительной части док-ва не записываем

Для того, чтобы сформулир-ть усл-я двух посл-х теорем нам понадобится новое опр-ие

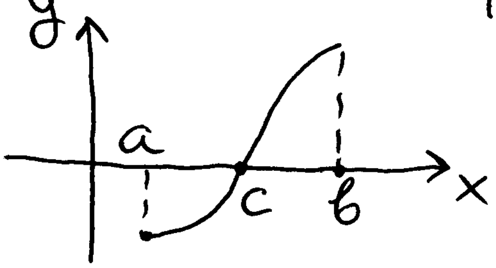
Опр Ф-я наз-ся непр-й на мн-ве, если она непр-на в каждой т-ке этого мн-ва

Теор Если $f(x)$ непр-на на $[a,b]$ и $f(a)\cdot f(b)<0$, то

$$\exists c\in(a,b): f(c)=0$$

Δ Условие $f(a)\cdot f(b)<0$ означает, что $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки

Пусть для опр-ти $f(a)<0$, а $f(b)>0$ (случай $f(a)>0$, $f(b)<0$ рассм-ся полн-ю ан-но)



Рассм-м мн-во $X\equiv\{x\in[a,b]\mid f(x)<0\}$

Мн-во X не пусто (т.к. $f(a)<0$, т.е. $x=a$ ему $\in$-ит) и огр-но сверху (напр, числом b):

$X\neq\varnothing$ + X-огр-но **сверху** $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ сущ-ет $\sup X\equiv c\in[a,b]$

поскольку мн-во X огр-но снизу числом a, а сверху - числом b (т.е. **a** - одна из нижних граней, а b - одна из верхних)

Согласно опр-ю точной верх-й грани это значит, что

1) $\forall x\in X\Rightarrow x\le c$

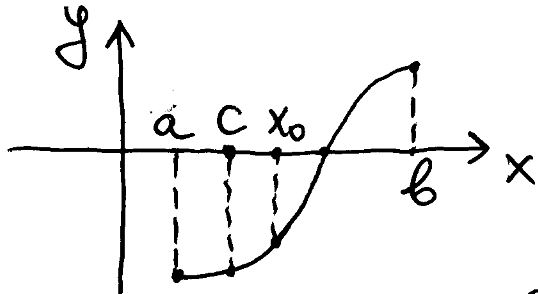
2) $\forall\tilde{c}<c\Rightarrow\exists\tilde{x}\in X:\tilde{x}>\tilde{c}$

Док-м, что $f(c)=0$ (т.е., что c и есть искомое число). Воспольз-ся док-м от обратного **7.14**

Предположим сперва, что $f(c)<0$ (и придём к противоречию)

1) Итак, пусть $f(c)<0$

Т.к. $f(b)>0 \Rightarrow c \neq b \Rightarrow c<b$



Далее, из утв-я об устойчивости знака непр-й ф-ии вытекает, что ф-я $f(x)$ будет сохранять знак и в нек-й окрест-ти точки c:

уст-ть знака $\Rightarrow \exists O_\delta(c): \forall x \in O_\delta(c) \cap [a,b] \Rightarrow f(x)<0$

Пусть x_0 – любое число из этой окр-ти, превосходящее c (но меньшее b):

$x_0 \in O_\delta(c) \cap (c,b)$ (т.к. $c<b$, то такое число заведомо найдётся)

$\Rightarrow f(x_0)<0$, т.е. $x_0 \in X$ и $x_0>c$ ← противоречие

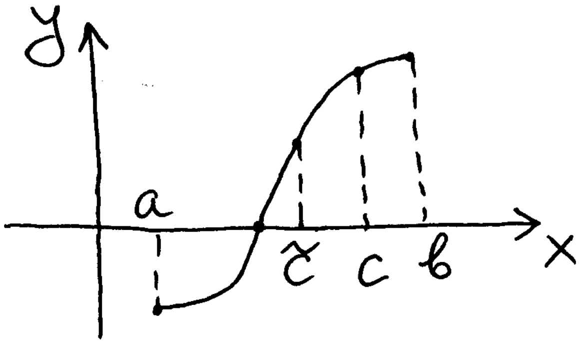
Но это противоречит усл-ю 1) опр-я точной верхней грани мн-ва X: $\forall x \in X \Rightarrow x \leq c$

$\Rightarrow \cancel{f(c)<0} \Rightarrow f(c) \geq 0$

↑ предположение опровергнуто

2) Допустим теперь, что $f(c)>0$

Т.к. $f(a)<0 \Rightarrow c \neq a \Rightarrow c>a$



Далее, из утв-ия об устойч-ти знака непр-ой ф-ии $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists O_\delta(c): \forall x \in O_\delta(c) \cap [a,b] \Rightarrow f(x)>0$

Пусть $\tilde{c} \in O_\delta(c) \cap (a,c)$ (т.к. $a<c$, то такое число заведомо найдётся)

$\Rightarrow \tilde{c} < c$ и $\forall x \in [\tilde{c}, c] \Rightarrow f(x)>0$

поскольку $[\tilde{c}, c] \subset O_\delta(c) \cap [a,b]$

Теперь пришло время задейств-ать усл-ие 2) опр-ия точной верхней грани мн-ва X. Согласно этому усл-ю

из нер-ва $\tilde{c} < c \Rightarrow \exists \tilde{x} \in X : \tilde{x} > \tilde{c}$

Заметим, что поскольку любое число $\in$-ее X не превосходит точной верхней грани c этого мн-ва (см. усл-ие 1)), то $\tilde{x}$ не только $> \tilde{c}$, но и $\le c$:

+1) $\Rightarrow \tilde{c} < \tilde{x} \le c$, т.е. $\tilde{x} \in [\tilde{c}, c] \Rightarrow f(\tilde{x}) > 0$ — по опр-ю $\tilde{c}$ (см. выше)

Но с другой стороны согласно опр-ю X из $\tilde{x} \in X \Rightarrow f(\tilde{x}) < 0$ противоречие

$\Rightarrow \cancel{f(c)>0} \Rightarrow f(c) \le 0$

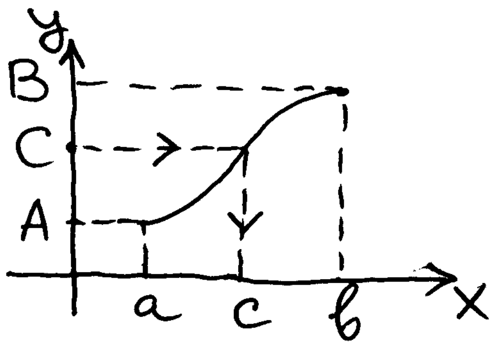
Т.о., нами устан-но, что

$$\begin{cases} f(c) \geq 0 \\ f(c) \leq 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{значит}} f(c) = 0$$

В качестве непосредств-го след-я к док-й теореме сформул-ем теорему о прохождении непрер-й ф-ии через все промежуточные знач-я

Теор Пусть $f(x)$ непр-на на $[a,b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда

$$\forall \underline{\underline{C}} \in (A,B) \Rightarrow \exists \bar{\bar{c}} \in (a,b) : f(\bar{\bar{c}}) = \underline{\underline{C}}$$



Δ Остаётся в кач-ве самост-го упр-я

Указание. Рассм-те ф-ю $g(x) = f(x) - \underline{\underline{C}}$ и примените предыд-ю теорему

Дополн-но

Зам-ие 1. Если ф-я f немонотонна, то $\bar{\bar{c}}$ может быть и не единств-ым

Зам-ие 2. Несложно показать, что если $\underline{\underline{C}} \in [A,B] \Rightarrow \exists \bar{\bar{c}} \in [a,b] : f(\bar{\bar{c}}) = \underline{\underline{C}}$ (этот утв-ие мгновенно след-т из аналог-го утв-я с круглыми скобками, т.е. из последней теоремы)