Лекция 8

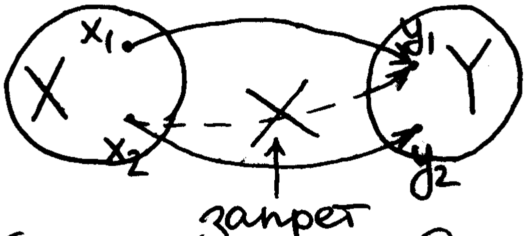
§3 Обратная функция

В этом §-фе мы решим вопрос о существ-нии и непр-ти ф-ии, обратной к непрерывной ф-ии $f(x)$

Сперва введём опр-ие обратной ф-ии

Пусть ф-я $y=f(x)$: $D_f=X$, $E_f=Y$ и пусть

I) $\forall y\in Y \Rightarrow \exists!\, x\in X: f(x)=y$



Напомню, что ! означает единств-ть, ~~т.е.~~ соотв-но $\exists!$ означает сущ-ет и единств-ть

Как хорошо видно из приведённого схемат-го изображения, это значит, что

II) $\forall x_1, x_2 \in X: x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

(иначе для $y_1=f(x_1)$ нашлись бы два элем-та $x=x_1$ и $x=x_2$ из X: $f(x_1)=f(x_2)=y_1$)

Очевидно, что верно и обратное, т.е., что если разным x_1 и x_2 отвечают разные y_1 и y_2, то каждому y отв-ет только один $x\in X$: $f(x)=y$

Т.о., треб-ие I $\Leftrightarrow$ треб-ию II

Опр. Ф-я, которая каждому $y \in Y$ ставит в соотв-ие $x \in X$: $f(x)=y$, наз-ся ~~ф-ей~~ обратной по отношению к ф-ии $y=f(x)$ (или просто — обратной к $y=f(x)$)

Обозн-ие $x = f^{-1}(y)$

Дополн-но:

Внимание! $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$ (т.е. $\neq$ в общем случае — для произв-й ф-ии f)

Напр $y=f(x)=x^3$

$x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} \neq \frac{1}{f(y)} = \frac{1}{y}$ ($\neq$ — не равно при всех y, т.е. эти ф-ии не совпадают, но, скажем, при $y=-1$, рав-во имеет место)

Однако для нек-х ф-й рав-во $f^{-1} = \frac{1}{f}$ может (случайно) оказаться справедливым. Один из простейших примеров

пусть $f(x)$: $D_f = E_f = \{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 2; 3\}$,

$f(\frac{1}{3}) = 2$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$, $f(2)=3$, $f(2) = \frac{1}{2}$

Проверяем:

$f^{-1}(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2} = \frac{1}{f(\frac{1}{3})}$, $f^{-1}(\frac{1}{2}) = 3 = \frac{1}{f(\frac{1}{2})}$,

$f^{-1}(2) = \frac{1}{3} = \frac{1}{f(2)}$, $f^{-1}(3) = 2 = \frac{1}{f(3)}$

Или другой пример, но с комплексной ф-ей:

$y = f(x) = x^i$, $x = f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{i}} = y^{-i} = \frac{1}{y^i} = \frac{1}{f(y)}$

Итак, согласно опр-ю

$$f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y,$$

а значит $f^{-1}(f(x))\equiv x \quad (x\in X)$

Очевидно также, что

$$f(f^{-1}(y))\equiv y \quad (y\in Y)$$

Последнее тождество фактически означает, что ф-я f явл-ся обр-й по отн-ю к ф-ии f^{-1}, т.е. по отн-ию к своей обр-й ф-ии

Т.о., $(f^{-1})^{-1}=f$ (функция, обратная к обратной, есть исходная ф-я)

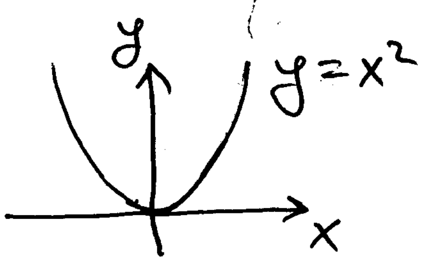
В связи с этим ф-ии f и f^{-1} наз-ют взаимно обратными

Зам-ие. Если ф-я $y=f(x)$ $(D_f=X, E_f=Y)$ имеет обратную, то говорят, что она устанавл-ет взаимно однозначное соотв-ие между эл-ми мн-в X и Y, или просто между мн-ми X и Y (вполне естеств-й термин, т.к. каждому $x\in X$ в таком случае соотв-ет нек-й $y\in Y$, и наоборот, каждому $y\in Y$ соотв-ет вполне опр-й $x\in X$)

Пример

1) Рассм-м ф-ю

$y=f_1(x)=x^2$:



$D_{f_1} = \mathbb{R}$. Тогда $E_{f_1} = [0, +\infty)$

Т.к. $\forall y > 0 \Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 \neq x_2$ и $y = x_1^2 = x_2^2$ $(x_1 = -\sqrt{y}, x_2 = +\sqrt{y})$, то ф-ии, обр-й к f_1 не сущ-ет:

$\Rightarrow \nexists\, f^{-1}(y)$

2) Рассм-м ф-ю

$y = f_2(x) = x^2 : D_{f_2} = [0, +\infty)$. Тогда $E_{f_2} \overset{\text{вновь равно}}{=} [0, +\infty)$

Т.к. $\forall y > 0 \Rightarrow \exists!\, x \in [0, +\infty) : y = x^2$, то сущ-ет ф-я, обратная к f_2, обозначаемая через $\sqrt{y}$:

$\exists\, f_2^{-1}(y) \equiv \sqrt{y} : D_{f_2^{-1}} = E_{f_2}, E_{f_2^{-1}} = D_{f_2}$

Зам-ие. Ф-ии f_1 и f_2 считаются совпадающими (равными): $f_1 = f_2$, если $D_{f_1} = D_{f_2} = X$ и $\forall x \in X \Rightarrow f_1(x) = f_2(x)$. В связи с этим ф-ии f_1 и f_2 из ~~разобранных~~ последних двух примеров, как имеющие разные области опр-ия, считаются различными: $f_1 \neq f_2$ (несмотря на то, что опр-ся одним и тем же выражением $y = x^2$)

Теорема (о сущ-ии, непр-ти и монотон-ти обр-й ф-ии)

Пусть $y = f(x)$:

1) $D_f = [a, b] \equiv X$

2) строго монотонна } на X
3) непрерывна }

Тогда

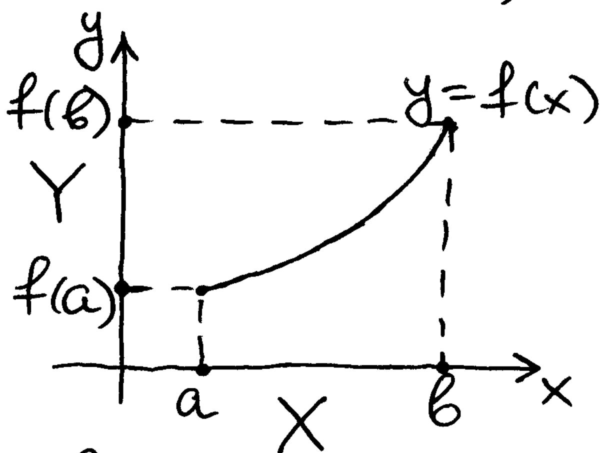
1) $E_f = [f(a), f(b)] \equiv Y$

2) сущ-ет $x = f^{-1}(y)$

3) f^{-1} строго монотонна } на Y
4) f^{-1} непрерывна }

Зам-ие. Ф-я наз-ся монотонной, если она монотонна на D_f. Поэтому вместо слов: пусть ф-я монотонна на $D_f = X$ можно говорить просто – пусть ф-я монотонна (ан-ое зам-ие относится и к непр-ти)

Δ Пусть для опр-ти ф-я $y = f(x)$ возрастает на $[a, b]$ (случай убыв-ей ф-ии рассм-ся полностью ан-но)



С геометр-й точки зрения содерж-ие теоремы весьма наглядно и справ-ть всех её утв-й не вызывает сомнений

Приведём строгое док-во каждого из утв-й теоремы

Δ 1) В силу непр-ти ф-ии $f(x)$ и теоремы о прохождении непр-й ф-ии через любое промежуточное значение

8.6

$\forall \underline{\underline{C}} \in (f(a), f(b)) \Rightarrow \exists x \in (a,b) : f(x) = \underline{\underline{C}}$, т.е.

$\underline{\underline{C}} \in Y$ - ~~обл-ти~~ мн-ву зн-й ф-ии f

С другой стороны в силу монотон-ти ф-ии f

$\forall x : a \le x \le b \Rightarrow f(a) \le \underset{\underset{C}{|||}}{f(x)} \le f(b)$

C - произв-ое зн-ие ф-ии

т.е. любое значение ф-ии f обязат-но заключено между $f(a)$ и $f(b)$

Итак, мы получили, что

$f(a) \le \underline{\underline{C}} \le f(b) \Leftrightarrow C \in Y$ (т.е. $\underline{\underline{C}}$ = нек-му $f(x)$, где $x \in [a,b]$)

Но эта равносильность и означает, что

$Y = [f(a), f(b)]$ $\Delta 1)$

$\Delta 2)$ Согласно опр-ю обрат-й ф-ии надо док-ть, что $\forall y \in Y \Rightarrow \exists ! x \in X : f(x) = y$ ($\Leftrightarrow \exists f^{-1}(y)$)

Предположим обратное, т.е., что

$\exists x_1, x_2 \in X : x_1 \ne x_2$, но $f(x_1) = f(x_2)$

противоречие

Тогда из нер-ва

$x_1 \ne x_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \\ x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{array}\right.$ т.е. $f(x_1) \ne f(x_2)$

в силу возр-я f

Но последнее нер-во противо-т тому, что $f(x_1) = f(x_2)$, — значит выдвинутое предположение

~~неверно~~ (равносильное ~~су~~ не сущ-ию обратной ф-ии) неверно, а след-но $f^{-1}(y)$ действ-но сущ-ет:

$\Rightarrow \exists f^{-1}(y)$ $\not\Delta 2)$

$\Delta 3)$ Нам надо док-ть, что обр-я ф-я f^{-1} строго монот-на на Y. Док-м, что в рассм-м случае, т.е. в случае возраст-ей "прямой" ф-ии $f(x)$, обр-я ф-я $f^{-1}(y)$ также возрастает

Согласно опр-ю возр-ей ф-ии нужно показать, что

$\forall y_1, y_2 \in Y : y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

Допустим обратное, т.е., что

$\exists y_1, y_2 \in Y : y_1 < y_2$ и $f^{-1}(y_1) \equiv x_1 \geq f^{-1}(y_2) \equiv x_2$

Но тогда, поскольку $f(x)$ - возр-я ф-я, то ~~из~~ последнего нер-ва (т.е. из того, что $x_1 \geq x_2$) следует, что

$f(x_1) = f(f^{-1}(y_1)) = y_1 \geq f(x_2) = y_2$, т.е. что $y_1 \geq y_2$, в то время как ~~согласно~~ по нашему предположению $y_1 < y_2$. Полученное противоречие опровергает предпол-ие о том, что $f^{-1}(y)$ не явл-ся возр-ей ф-ей

Итак, $f^{-1}(y)$ действ-но возр-ет на Y $\not\Delta 3)$

$\Delta 4)$ Остаётся док-ть, что ф-я $x = f^{-1}(y)$ непр-на на сегменте Y, т.е. что

$f^{-1}(y)$ непр-на в $\forall$ т. $y_0 \in Y$

Согласно опр-ю непр-ти нужно док-ть, | 8.8

что $\lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) \equiv x_0$, т.е., что

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall y : \begin{matrix} y\in Y \\ |y-y_0|<\varepsilon \end{matrix} \Rightarrow |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$

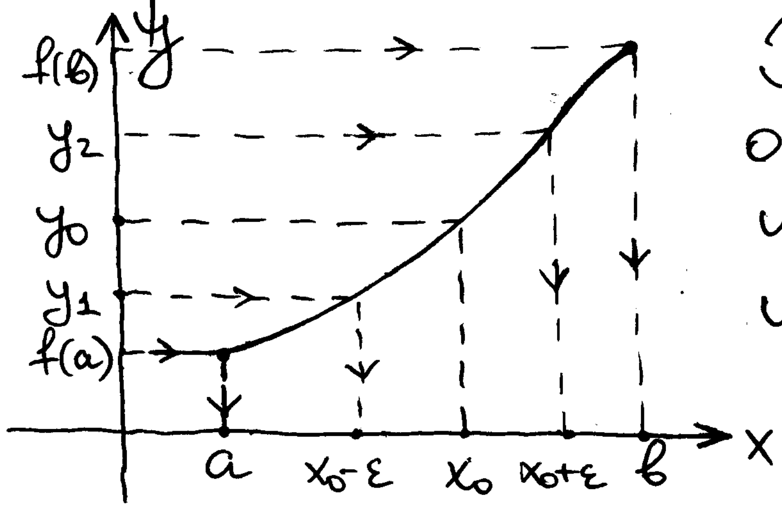
Заметим, что если для нек-го $\varepsilon_0 > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$:
— " — |— " —| $< \varepsilon_0$, то при $\forall \varepsilon > \varepsilon_0$ и том же δ
$\Rightarrow$ |— " —| $< \varepsilon$

Иными словами, если подходящее δ найдётся для нек-го (пол-го) ε_0, то оно тем более найдётся и $\forall \varepsilon > \varepsilon_0$

Из данного наблюдения вытекает, что при док-ве сущ-я предела или при док-ве непрер-ти той или иной ф-ии мы вполне можем ~~ограничи-ся~~ рассм-ем не всех $\varepsilon > 0$, а лишь $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ некоторого (т.к. при больших ε доказываемые утв-я будут тем более спр-вы). В некоторых случаях это приводит к существ-му упрощ-ю док-в (доказыв~~аемое утв~~ нами утв-ие о непр-ти $f^{-1}(y)$ как раз ~~такой~~ относится к такому случаю)

Итак, имея в виду сделанное зам-ие, док-м, что
$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \Rightarrow \exists \delta > 0$: — " —,

где ε_0 – нек-ое пол-ое число, которое мы выберем ниже



Приведём ещё раз геом-ю иллюстрацию и заметим, что кривая, изображённая на пл-ти xy одновременно служит графиком как ф-ии $y=f(x)$, так и обратной ей ф-ии $x=f^{-1}(y)$. Сейчас мы рассм-м её именно как график ф-ии $x=f^{-1}(y)$ (поскольку мы док-м утв-ие о непр-ти обратной ф-ии). Т. о., теперь мы считаем, что ось y содержит значения аргумента, а ось x – зн-я ф-ии (что символически подчёркнуто направлением стрелочек на пунктирных линиях)

Заметим, что под графиком обр-й ф-ии в собственном смысле этого слова подразум-ют график ф-ии $y=f^{-1}(x)$. Такой график, разумеется, в общем случае уже не ~~будет~~ совпадает с графиком ф-ии $y=f(x)$, но на этом вопросе мы сейчас не будем останавл-ся, продолжая работать лишь с графиком $x=f^{-1}(y)$ (более подробный разговор о графиках обр-х ф-й предстоит в §4)

С геом-й точки зрения ~~опр-ие~~ непр-ть | 8.10
ф-ии $f(y)$ в т. y_0 означает, что
$\forall O_\varepsilon(x_0) \Rightarrow \exists O_\delta(y_0): O_\delta(y_0) \cap Y$ целиком отображается в $O_\varepsilon(x_0)$

I) Пусть $f(a) < y_0 < f(b)$. Тогда в силу возр-я ф-ии $f^{-1}(y) \Rightarrow a < \underset{x_0}{\underset{\parallel}{f^{-1}(y_0)}} < b$

Выберем $\varepsilon_0 > 0: O_{\varepsilon_0}(x_0) \subset (a,b)$

Т.к. $\varepsilon < \varepsilon_0$, то очевидно, что $O_\varepsilon(x_0)$ также будет вложено в интервал (a,b):

$O_\varepsilon(x_0) \subset O_{\varepsilon_0}(x_0) \subset (a,b)$ (см. рисунок)

Обозначим $f(x_0-\varepsilon) \equiv y_1$, $f(x_0+\varepsilon) \equiv y_2$

Поскольку $f(x)$ - возр-я ф-я, то $y_1 < y_0 < y_2$

Далее, т.к. ф-я $f^{-1}(y)$ тоже возр-ет, то

$\forall y \in (y_1, y_2) \Rightarrow f^{-1}(y) \in (f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) = (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \equiv O_\varepsilon(x_0)$

отвеч-ее ему (у-ку) зн-ие на осях будет $\in$-ть -и-

Для заверш-я док-ва утв-я 4 выберем

$\delta > 0: O_\delta(y_0) \subset (y_1, y_2) \subset Y$ ← кот-й, в свою очередь, $\subset$ -и-

зависят от ε, поэтому δ, разум-ся, $= \delta(\varepsilon)$

Тогда получается, что т.к. $O_\delta(y_0)$ целиком $\in$-т Y

$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $\forall y \in O_\delta(y_0) \cap Y = O_\delta(y_0) \subset (y_1, y_2) \Rightarrow$

в опр-ии непр-ти точка не ставится (т.е. y_0 не выкалывается)

$\Rightarrow f^{-1}(y) \in O_\varepsilon(x_0)$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$

т.е. для любого y из δ-окр-ти т. y_0 соотв-ее значение ф-ии $f^{-1}(y)$ попадает в ε-окр-ть т. x_0 ($=f^{-1}(y_0)$). Но по опр-ю непр-ти это и означает, что $f^{-1}(y)$ непр-на в т. y_0

II) При $y_0=f(a)$ и $y_0=f(b)$ непр-ть обр-й ф-ии док-ся ан-но (надо только учесть, что непр-ть ф-ии $f^{-1}(y)$ в т. $f(a)$ означает непр-ть слева, а в т. $f(b)$ – непр-ть справа) $\cancel{\Delta}$ 4)

Док-во теоремы о сущ-ии, монотон-ти и непр-ти **обр-й** ф-ии полностью завершено $\cancel{\Delta}$

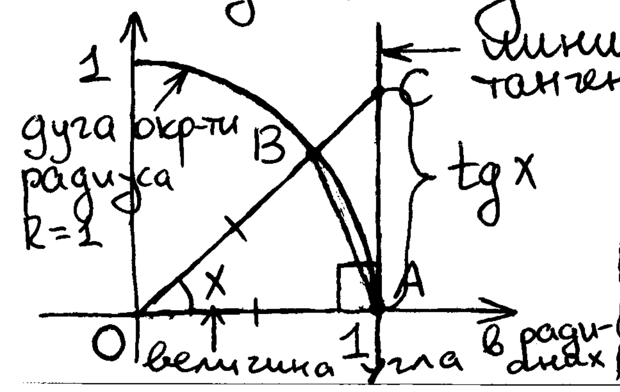
§4 Элементарные функции

Прежде всего введём в рассм-ие и иссл-ем на непр-ть так наз-ые основные (или простейшие) элемент-ые ф-ии

1) Начнём с ф-ии $y=\sin x$

Док-м сперва, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0 = \sin 0$, т.е., что ф-я $\sin x$ непр-на в т. $x=0$

Для этого воспольз-ся геометр-им опр-ем sin-са (точнее формулой для площади Δ-ка, являющ-ся следств-м этого опр-я)



Т.к. $\Delta AOB \subset$ сектор $AOB \subset \Delta AOC$, то

$$\underset{\frac{1}{2}1^2\sin x}{\underset{\shortparallel}{S_{\Delta AOB}}} < \underset{\frac{1}{2}x^2}{\underset{\shortparallel}{S_{\text{сект. }AOB}}} < \underset{\frac{1}{2}1\cdot \operatorname{tg} x}{\underset{\shortparallel}{S_{\Delta AOC}}}$$

Т.о., при $0<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0<\sin x<x<\operatorname{tg} x$ **8.12**

В силу нечётности ф-й x, $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ отсюда сразу же имеем ← запомните это нер-во! — оно понадобится нам позже

$\underbrace{|\sin x| \le |x|} \le |\operatorname{tg} x|$ при $|x|<\frac{\pi}{2}$ (= во реализуется лишь при $x=0$)

Но т.к. $|\sin x| \le 1$, то на самом деле левое нер-во выполняется при ~~∀x~~ любом вещ-м x:

$\Rightarrow |\sin x| \le |x|$ при $\forall x \in \mathbb{R}$

Последнее нер-во с модулем $\sin x$ $\Leftrightarrow$ но одному двойному нер-ву:

$$\begin{array}{ccccc} -|x| & \le & \sin x & \le & +|x| \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Отсюда, устремляя x к нулю, на основании теоремы о 2-х полицейских мгновенно получаем требуемый результат:

$\sin x \to 0$, $x \to 0$

Теперь док-м непр-ть ф-ии $y=\sin x$ в произв-й т. $x=a \in \mathbb{R}$ (при $\forall x=a \in \mathbb{R}$)

Рассм-м разность

$$\sin x-\sin a=2 \underbrace{\sin \frac{x-a}{2}}_{\to 0} \underbrace{\cos \frac{x+a}{2}}_{\text{огр-на}}$$

Т.к. ф-я $\varphi(x)=\frac{x-a}{2}$ непр-на в т. a, а ф-я (как мы только что док-ли) $\sin \varphi$ непр-на в т. $\varphi(a)=0$, то сложная ф-я

$\sin \varphi(x)=\sin \frac{x-a}{2}$ непр-на в т. a

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \sin \frac{x-a}{2}=\sin \frac{a-a}{2}=0$$

Т.о., $\sin x-\sin a = \underset{\text{в т.}a}{\text{б.м.}} \times \text{огр} = \underset{\text{в т.}a}{\text{б.м.}} (\to 0, x \to a)$

8.13

Но это значит, что

$\sin x \to \sin a$ при $x \to a$,

т.е., что ф-я $\sin x$ непр-на в т.а чтд

2) Теперь введём ф-ю, обратную к ф-ии $y = \sin x$, точнее к ф-ии $y = f(x) = \sin x : D_f = [-\pi/2, +\pi/2]$

Заметим, что поскольку $\sin x$ опред-н при любом x, то обл-ю опр-я ф-ии $y = \sin x$ по умолчанию (т.е. в случае, если о ней ничего не сказано явно), считается вся вещ-я ось $\mathbb{R}$. Но для $\sin x$ с такой обл-ю опр-я обр-й ф-ии не сущ-ет. Именно поэтому мы и сузили обл-ть опр-я синуса до указанного промежутка

Т.к. ф-я $f(x)$ возрастает и непр-на на $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, то по док-й теореме об обратной ф-ии сущ-ет ф-я

$x = f^{-1}(y) \equiv \arcsin y : D_{f^{-1}} = [\sin(-\frac{\pi}{2}), \sin(+\frac{\pi}{2})] = [-1, +1]$,

обр-я по отн-ию к ф-ии $y = f(x)$

По той же теореме обр-я ф-я (т.е. ф-я $x = \arcsin y$) возраст-ет и непр-на на отр-ке $[-1, +1]$

Теперь обсудим вопрос, касающийся обоз-н-ия зависимых и независимых перем-ых и связанный с ним вопрос о графике обратной ф-ии

Итак, заметим сначала, что для нас не яв-

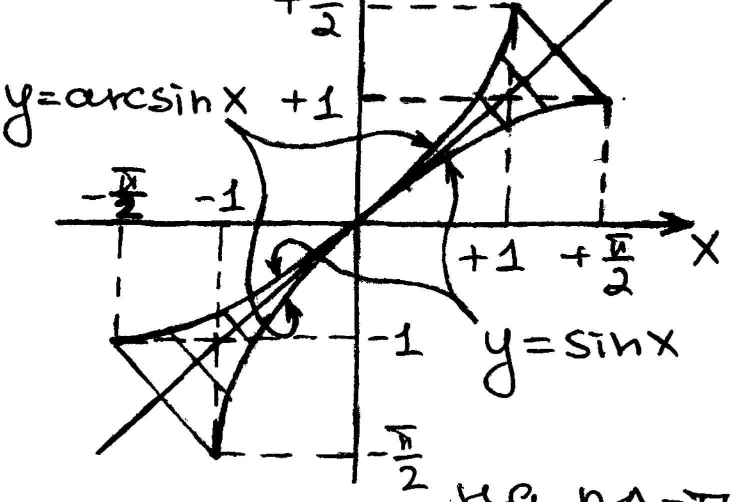
ляется принципиальным то, каким обра-
зом мы обозн-ем аргумент и зн-я ф-ии. В том
смысле, что переход к **новым** обозн-ям для за-
вис-й и незав-й перем-ых не явл-ся, разум-ся,
переходом к новой ф-ии, т.е. к новому зако-
ну или правилу, связывающему эти перемен-
ные. Напр-р, мы считаем, что $y=x^2$ и $\beta=\alpha^2$
суть одна и та же ф-ия (при условии, конеч-
но, что x и $\alpha \in$ одному и тому же мн-ву X)

В связи с тем, что это замеч-ие распрост-
раняется на совершенно любые (в том числе
и обратные) ф-ии, получается, что не толь-
ко $x=f^{-1}(y)$, но и, скажем, $\beta=f^{-1}(\alpha)$ и даже
$y=f^{-1}(x)$ явл-ются ф-ей, обр-й по отн-ю к ф-ии
$y=f(x)$

Имея это в виду, при построении на коор-
д-й пл-ти XOY графика ф-ии, обр-й к ф-ии
$y=f(x)$, которая, как я напомню, по умолча-
нию обозн-ся через $x=f^{-1}(y)$, в роли незави-
симой пер-й выбирают x, а в роли зависимой
- y (т.е. по сравн-ю со стандартным обозн-ем
x и y меняются ролями (местами)). Это согла-
шение (о ~~принципе~~ выборе обозн-й пер-х) весь-
ма естест-но и удобно, т.к. при таком под-
ходе взаимосвязь между прямой и обрат-

ной ф-ии (на уровне графиков) становится более наглядной. Теперь (после принятия указ-го соглашения) график ф-ии, обр-й к $y=f(x)$, т.е. график ф-ии $y=f^{-1}(x)$, как несложно видеть (убедитесь самост-но), получается из графика исходной ф-ии $f(x)$ отражением относит-но прямой $y=x$. Заметим, что, как уже подчёркивалось выше, **в** случае исполь-я обозн-я $x=f^{-1}(y)$ графики „прямой": $y=f(x)$ и обрат-й: $x=f^{-1}(y)$ ф-й на пл-ти XOY совпадают (меняется лишь ~~смысл~~ назначение осей: в первом случае на оси x находятся зн-ия **независимой** пер-й, а на оси y – завис-й, а во втором наоборот)

Вернёмся к ф-ии $y=f(x)=\sin x$ и изобразим график обр-й к ней ф-ии, под которым в связи со всем вышесказ-м мы понимаем



теперь график ф-ии $y=\arcsin x$ (именно в таких обозн-ях!); ф-я $x=\arcsin y$ хоть и явл-ся тем же arcsin-ом (т.е. той же ф-ей), но её график на пл-ти XY выглядит иначе, совпадая с графиком ф-ии $y=f(x)$

Задание. Док-ть самост-но:

а) непр-ть $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ (в тех точках, в которых они опр-ны), т.е. оставшихся тригонометр-х ф-й

б) существ-ие и непр-ть соотв-х обр-х ф-й (ф-ии, обр-ые к тригон-им, наз-ют также обр-ми тригоном-ми ф-ми)

(В случае затруднений см. Ильин, Позняк, гл IV, §5 или конспект Бутузова, гл III, §4)

Дополн-но:

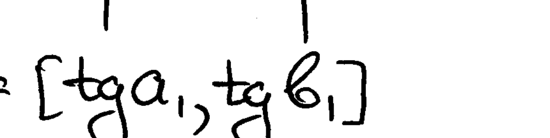
5) Рассм-м ф-ю $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\sin x$ и $\cos x$ непр-ны $\Rightarrow$ tg непр-на $\forall x: \cos x \neq 0$, т.е. $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

6) На любом отр-ке $[a_1, b_1] \subset (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ ф-я $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ возр-ет и непр-на $\Rightarrow$ на любом отр-ке $[a_1, b_1]$ у ф-ии $f(x)$ сущ-ет возр-ая и непр-я обратная ф-я $x = f^{-1}(y) \equiv \operatorname{arctg} y$: $D_{f^{-1}} = [\operatorname{tg} a_1, \operatorname{tg} b_1]$

Но т.к. $\lim\limits_{a_1 \to -\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} a_1 = -\infty$, а $\lim\limits_{b_1 \to +\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} b_1 = +\infty$, то

$\forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists a_1, b_1 \in \mathbb{R}: y \in [\operatorname{tg} a_1, \operatorname{tg} b_1]$



Т.о., ф-я $x = \operatorname{arctg} y$ (ввиду произволь-ти a_1 и b_1) на самом деле опр-на для соверш-но любого $y \in \mathbb{R}$, т.е. сущ-ет ф-я $x = f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$: $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

8.17

Похожие рассуждения использ-ся и при опр-ии нек-х других обр-х ф-й, рассм-~~ых~~ в этом §-фе
(при ~~этом~~ она ~~будет~~ явл-ся обр-й к ф-~~ии~~ $y=f(x)=\operatorname{tg}x$: $D_f=(-\pi/2, +\pi/2)$)

Т.о., мы рассм-ли 8 основных элем-х ф-й (тригонометр-ие и обратные к ним). Рассм-м оставшиеся три

9) Из школьного курса нам известно опр-ие и св-ва степени с рацион-м показат-ем:

a^r, где $a>0$, $r\in\mathbb{Q}$,

т.е. фактически изв-на показательная ф-я

$y=f_1(x)=a^x$: $D_{f_1}=\mathbb{Q}$, $a>0$

Оказыв-ся, опр-ие степени пол-го числа a можно обобщить (исп-я, напр, понятие точной верхней грани) на случай произв-го вещ-го показателя, т.е. фактически получить ф-ю

$y=f_2(x)=a^x$: $D_{f_2}=\mathbb{R}$, $a>0$,

причём так, что все св-ва, справедливые для f_1 (т.е. для "рационального случая") будут справ-вы и для ф-ии f_2 (т.е. для "вещ-го сл-я")

Дадим такое опр-ие

Пусть сперва $a>1$, $x\in\mathbb{R}$

Опр $a^x=\sup\{a^r \mid r\in\mathbb{Q}$ и $r<x\}$ сравните с опр-м суммы и произв-я вещ-х чисел

Пусть теперь $0<a<1$, $x\in\mathbb{R}$

Опр $a^x = \underbrace{(1/a)}_{>1}{}^{-x}$ – см. предыд-ее опр-ие

Зам-ие. Т.к. $1/a>1$, a $-x$ (также как и x) $\in\mathbb{R}$, то ввиду предыд-го опр-я, что такое $(1/a)^{-x}$ мы уже знаем

Наконец, если $a=1$, то a^x по опр-ю $\equiv 1$:

Опр $1^x=1$ при $\forall x\in\mathbb{R}$

Дополн-но:

Зам-ие. Можно док-ть, что при $a>1$ спр-во: $\sup\{a^r \mid r\in Q \text{ и } r<x\} = \inf\{a^r \mid r\in Q \text{ и } r>x\}$. Это рав-во позволяет дать равносильное приведённому выше опр-ие a^x при $a>1$ через фигурир-ий в нём $\inf$-м

Задание. Док-ть сам-но:

а) Непр-ть ф-ии $y=a^x\equiv f(x)$

б) $\exists$-ие и непр-ть ф-ии $x=f^{-1}(y)\equiv \log_a y$, обр-й к ф-ии $y=a^x$