11) Поскольку мы теперь знаем, что такое a^r при любом полож-м a и произвол-м вещ-м α:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall a > 0 \Rightarrow a^{\alpha}$,

то, фиксируя показ-ль α и рассм-я основание как перем-ю величину (т.е. поступая наоборот по сравн-ию со случаем показат-й ф-ии a^x), приходим к степенной ф-ии $y = x^{\alpha}$:

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow y = x^{\alpha}: D_f = (0, +\infty)$

Опираясь на основные св-ва показат-й и логарифм-й ф-й (вытекающие из опр-й этих ф-й), убеждаемся в том, что

$$x^{\alpha} = e^{\ln x^{\alpha}} = e^{\alpha \ln x} \equiv e^{\varphi(x)} \equiv g(\varphi(x)) \equiv y(x)$$

взаимно обр-ые ф-ии — рав-ва по опр-ю

$g(\varphi) = e^{\varphi}$, $\varphi(x) = \alpha \ln x$

Но тогда на основании теоремы о непр-ти сложной ф-ии из непр-ти f и $\varphi \Rightarrow$ непр-ть $y(x) = x^{\alpha}$:

g и φ — непр $\Rightarrow y(x) = x^{\alpha}$ — непр-на

Зам-ие. В случае $\alpha \in \mathbb{N}$ (натур-го пок-ля) степенная ф-я опр-на и непр-на на всей вещ-й оси!

В заключение этого §-фа дадим опр-ие

класса элем-х ф-й. Это опр-ие опира-
ется, в свою очередь, на уже фактически
введённое нами понятие основной элем-
й ф-ии, опр-ие кот-й мы также сейчас
сформулируем

Опр Ф-ии вида 1)-11) наз-ся основными
ми или простейшими элем-ми ф-ми

Опр Элементарной ф-ей наз-ся ф-я, по-
лучаемая из основных элем-х ф-й с помо-
щью конечного числа арифм-х операций
и суперпозиций. Мн-во всех эл-х ф-й наз-
ся классом элемент-х ф-й

Дополн-но: Ф-я $y=f(x)\equiv C : D_f=\mathbb{R}$ формально может быть представлена, напр, в виде $y=C^{\frac{1+x^2}{1+x^2}}$ или $y=C^{x^0}$, если договорится, что $0^0=1$

Напр: $\cos 3x+x^3$, $e^{-x}+\operatorname{tg}\ln x$

Зам-ие. Из непр-ти основных эл-х ф-й вытекает непр-ть любой эл-й ф-ии (во всех предельных точках её обл-ти опр-я)

т.о. $y=C$ - элемент-я ф-я (но не основная элем-я ф-я)

Непр-ть осн-х элем-х ф-й $\Longrightarrow$ непр-ть элем-х ф-й (при $\forall x$ из D_f, являющемся её предельной т-ой)

(у осн-х эл-х ф-й все т-ки обл-ти опр-я - предельные)

т.е. x должен и $\in D_f$ и быть её пред-й точкой

§5 Замечательные пределы

Всего имеется два замечат-х предела. Начнём с первого из них

которые так и наз-ют: 1-й и 2-й зам-й пределы

Первый замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$ — неопр-ть $\frac{0}{0}$

Зам-ие. Первым замечат-м пределом наз-ют как само это рав-во, так и предел, стоящий в его левой части (это зам-ие относится и ко второму зам-му пределу)

Δ Ранее было док-но, что $\forall x\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,+\frac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow |\sin x| \underset{\substack{\uparrow\\ \forall x\in\mathbb{R}}}{<} |x| \underset{\substack{\uparrow\\ \forall x\in(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2})\setminus\{0\}}}{<} |\operatorname{tg} x| = \frac{|\sin x|}{|\cos x|} \quad \Big| \times\frac{1}{|\sin x|}$$

Отсюда после деления на $|\sin x|$ имеем

$$1<\left|\frac{x}{\sin x}\right|<\frac{1}{|\cos x|} \text{ или } |\cos x|<\left|\frac{\sin x}{x}\right|<1$$

С учётом того, что при рассм-ых $x \Rightarrow \cos x>0$, $\frac{\sin x}{x}>0$, это нер-во принимает вид (модули можно просто опустить):

$$\underset{\substack{\downarrow\\1}}{1}<\underset{\substack{\downarrow\\1}}{\frac{\sin x}{x}}<\underset{\substack{\downarrow\\1}}{\frac{1}{\cos x}}\to 1 \quad x\to 0$$

$\leftarrow$ В силу непр-ти ф-ии $\cos x \Rightarrow \lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$

Заметим, что $1\to 1$ и $1/\cos x\to 1$ при $x\to 0$. Тогда из последнего нер-ва и теоремы о двух полицейских мгновенно следует искомый результат

$\blacktriangle$

Второй замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e} \text{ — неопр-ть } 1^{\infty}$$

Для док-ва данного соотн-я нам понадобится одно вспомогат-ое утв-ие. Это утв-ие является естеств-ым дополнением к теореме о непрерыв-ти сложной ф-ии, поэтому прежде чем его сформулир-ть вспомним и немного переосмыслим (с целью выявления указанной взаимосвязи с последующим утв-ем) содержание данной теоремы

Итак, я напомню что если ф-ии f и φ удовл-ют усл-ям теоремы о непр-ти сложной ф-ии, то

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = f(\varphi(a)) = \left[\begin{array}{ll} f(\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)) - & \text{в силу непр-ти } \varphi(x) \text{ в т.} a \\ \lim\limits_{y\to\varphi(a)} f(y) - & \text{в силу непр-ти } f(y) \text{ в т. } \varphi(a) \end{array}\right.$$

а $f(\varphi(a))$ в свою очередь, можно представить как в виде $\square$, так и в виде $\square$

Каждое из полученных соотн-й даёт свой вариант интерпретации теоремы о непр-сти сложной ф-ии:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x)) = f(\lim\limits_{x\to a}\varphi(x))$

Это рав-во естеств-но интерпрет-ть как возможность внесения знака предела в аргумент непр-ой ф-ии

2) $\lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x)) = \lim\limits_{y\to b} f(y)$, $b = \lim\limits_{x\to a}\varphi(x) \; (=\varphi(a))$

А это рав-во предст-ет собой формулу замены переменной (т.е. формулу перехода от предела по x к пределу по y) под знаком предельного перехода

Заметим без док-ва, что для справедлив-ти каждого из соотн-й 1) и 2) дост-но непр-ти одной лишь внешней ф-ии f, а от ф-ии φ требуется только, чтобы она имела предел при $x\to a$:

дост-но, чтобы $\left(\text{сущ } \lim\limits_{x\to a}\varphi(x) \equiv b\right) + \left(f(x) \text{ непр в т. } b\right)$

Дополн-но:

Убедиться в справ-ти последнего зам-ия очень легко. Для этого при необход-ти (т.е., если $\varphi(a)\neq b$) надо лишь переопр-ть или доопред-ть ф-ю $\varphi(x)$ в т. a своим предельным зн-ем в этой точке: $\varphi(a) \equiv b$ (в результате такого опред-я она станет непр-й) и после этого применить теорему о непр-ти сложной ф-ии:

$f(\varphi(x)) \to f(\varphi(a)) = f(b)$ при $x\to a$

Пусть теперь внутренняя ф-я $\varphi(x) \to \infty$ при $x \to a$. Что на сей раз можно сказать отн-но предела ф-ии $f(\varphi(x))$? Оказыв-ся, спр-во утв-ие, фактически обобщающее формулу замены перем-й под знаком пред-го перехода на случай ∞-го пред-го зн-я: $b = \infty$ ф-ии $\varphi(x)$

Утв Пусть сложная ф-я $h(x) = f(\varphi(x))$:

1) $\varphi(x) \to \infty$, $x \to a$

2) $f(y) \to c$, $y \to \infty$

Тогда

$$\lim_{x \to a} f(\varphi(x)) = \lim_{y \to \infty} f(y) = c$$

О непр-ти ф-ии $f(x)$ в т. $x = b$, т.е. в т. $x = \infty$ мы уже не говорим, поск-ку у нас нет понятия непр-ти ф-ии в ∞ удален-й т-ке

Зам-ие. Сформул-ое утв-ие спр-во и при $x \to a \pm 0$, ∞, $\pm\infty$

Вернёмся ко второму замечат-му пределу и док-ем, что он сущ-ет и $= e$

Δ Я напомню, что по своему опр-ю число e равно

$$e = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{f_n \equiv f(n)}$$

Т.о., нам надо док-ть, что исходный предел $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ сущ-ет и равен пределу пос-ти f_n

Чтобы в этом убедиться, прежде всего сделаем замену перем-й во втором замеч-м пределе, так чтобы перейти от предела в т. 0 к пределу на ∞-ти $\boxed{9.7}$

$\cancel{\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}}$ $\quad \frac{1}{x}\equiv\varphi(x)=y\to\infty,\ x\to 0$ (и $y\neq 0$)

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}}=\lim_{x\to 0}f(\varphi(x))=$$

но это и есть ф-я $f(\varphi(x))$ – см. выше опр ф-ии f

$$=\lim_{y\to\infty}f(y)=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}f(x)$$

сущ-ие и величина предела не зависят от того, какой буквой обозн-ся предельная перем-ая (т.е. перем-я, по которой берётся предел)

Т.о., мы свели исходный предел вот к такому пределу

Заметим далее, что

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=e\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=e\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}f(x)=e$$

(это утв-ие мгновенно следует из опр-я пределов на ∞-ти и остаётся в кач-ве несложного самост-го упр-я)

I) Покажем сперва, что $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ \uparrow\\ \text{здесь } x\in\mathbb{R}}}f(x)=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \uparrow\\ \text{а здесь } n\in\mathbb{N}}}f_n=e$

Рассм-м след-ую сложную ф-ю

$$\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}=f([x])\equiv f(\varphi(x)),$$ где

$[x] \equiv \psi(x) = y \to +\infty,\ x \to +\infty$
и $y \in \mathbb{N}$ при $x \geq 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(\psi(x)) = \lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\geq 1}} f(\psi(x)) = \lim_{\substack{y\to+\infty\\ y\in\mathbb{N}}} f(y) \equiv$$

$$\equiv \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} f_n$$

при исслед-ии предела на $+\infty$-ти мы можем огран-ить себя зн-ми $x \geq$ любому наперёд заданному x_0 (легко убедиться в том, что зн-ия $f(x)$ при $x < x_0$ на сущ-ие и величину такого предела не влияют)

Итак, $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}}_{f([x])} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Дополн-но:

⌈В дальнейшем мы не будем вводить промежуточных обозн-й (наподобие $[x] = \psi(x)$), как в последнем случае), а будем сразу переходить к новой перем-й (подразум-я применение теоремы о непр-ти сложной ф-ии или дополняющего её утв-я о пределе сложной ф-ии с ∞-но большой "внутр-ей" ф-ей). Напр

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ x\geq 1}} \left(1+\frac{1}{\underbrace{[x]}_{=y}}\right)^{[x]} = \lim_{\substack{y\to\infty\\ y\in\mathbb{N}}}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} f_n = e$$
⌊

Для док-ва сущ-я предела на $+\infty$ и у самой ф-ии $f(x)$ (а не только у $f([x])$), воспользуемся теор-й о двух милиц-х (применение этой т-мы одновременно докажет, что $\lim f(x) = e$) **9.9**

Чтобы применить эту теорему, нам надо соответств-м образом оценить снизу и сверху ф-ю $f(x)$. Получим необходимые оценки.

Начнём с очевидного нер-ва

$$[x] \le x < [x]+1 = [x+1] \Rightarrow \frac{1}{[x+1]} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{[x]} \Rightarrow$$

на самом деле здесь даже $<$, но ~~для~~ пусть для симметрии будет $\le$ (нам этого дост-но)

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{[x+1]} \le 1 + \frac{1}{x} \le 1 + \frac{1}{[x]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{[x+1]}\right)^{[x]} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} \Rightarrow$$

(разум-ся, мы учитываем также, что основания >1)

$$\Rightarrow \underbrace{\left(1+\frac{1}{[x+1]}\right)^{[x+1]}}_{\to e} \underbrace{\left(1+\frac{1}{[x+1]}\right)^{-1}}_{\to 0} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \underbrace{\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}}_{\to e} \underbrace{\left(1+\frac{1}{[x]}\right)}_{\to 0}$$

e при $x \to \infty$ 0 $\qquad$ e при $x \to \infty$ 0

смещение арг-та на единицу величины предела не меняет

Поскольку левая и правая части последнего нер-ва $\to$ к одному и тому же числу e, то из теоремы о двух милиц-х мгновенно вытекает требуемый результат:

$\Rightarrow \ell\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e, \quad x \to +\infty$ $\quad \Delta_{I}$

II) Для завершения док-ва теоремы остаётся показать, что

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = e$$

Сделаем замену переменной под знаком этого предела: $y = -x$ $(x \to -\infty \Rightarrow y \to +\infty)$

т.е. мы фактически сводим предел к уже рассм-му выше в I-й части

Тогда

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^{+y} = \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y-1+1} =$$

$$= \underbrace{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}}_{\to e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)}_{\frac{1}{y-1}\to 0} \to e \text{ при } y \to +\infty,$$

а значит $f(x) \to e, \quad x \to -\infty$ $\quad \Delta_{II}$

Док-во того, что второй замеч-й предел $= e$ полностью завершено $\quad \Delta$

В заключение этого §-фа (а вместе с тем и всей III главы о непр-х ф-ях) рассм-м несколько примеров примен-я зам-х пред-в

Примеры

1) Асимптотическая формула для sin-а

$$\frac{\sin x - x}{x} = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} - 1 \to 0, \quad x \to 0$$

$\Rightarrow \sin x - x = \bar{\bar{o}}(x)$ или $\underline{\sin x = x + \bar{\bar{o}}(x)}$ в т. $x = 0$

2) Асимптотическая формула для логарифма

$$\frac{\ln(1+x)-x}{x} = \ln\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} - 1 \xrightarrow{\text{в силу непр-ти натур-го логарифма}} \ln e - 1 = 0, \quad x \to 0$$

$(1+x)^{\frac{1}{x}} \to e$

$\Rightarrow \ln(1+x) - x \overset{e}{=} \bar{o}(x)$ или $\ln(1+x) \overset{3}{=} x + \bar{o}(x)$ в т. $x=0$

Глава IV

Дифференцируемые функции

§1 Определение производной

Пусть дана ф-я $y = f(x)$: $D_f = (a, b)$

Пусть далее x и $x + \Delta x$ – нек-ые зн-я арг-та x:

x, $x + \Delta x \in (a, b)$

x — фикс-но, $x + \Delta x$ — произвольно

Будем считать, что x – фиксированно, а Δx – произвольно. В таком случае величину Δx наз-ют приращением аргумента ф-ии f (в точке x)

Теперь введём понятие приращ-ия ф-ии

Пусть

$x \to y = f(x)$

$x + \Delta x \to y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

Тогда $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Величину Δy и наз-ют приращ-ем ф-ии $y=f(x)$ в т-ке x
Введённые понятия приращ-я арг-та Δx и приращ-я ф-ии Δy позволяют сформулировать след-ее опр-ие произв-й

Опр Если существует
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$
то он наз-ся произв-й ф-ии $y=f(x)$ в т. x

Обозн $f'(x)$, $y'(x)$

Зам-ие 1. Если аргумент ф-ии f имеет физический смысл времени, то его, как правило, обозн-ют буквой t, а произв-ю по этому аргументу - точкой над характеристикой ф-ии: $\dot{f}(t)$ или $\dot{y}(t)$

Зам-ие 2. Мы можем рассм-ать приращение Δy в любой т-ке x интервала (a,b). Т.о., Δy зависит ~~от~~ не только от Δx, но и от x: $\Delta y = \Delta y(x, \Delta x)$, причём зависимость от x по сущ-ву явл-ся парам-й, поскольку $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ может рассм-ся хоть и при произв-ом, но фиксиров-ом (при $\Delta x \to 0$) зн-ии x из нашего интервала. Т.к. величина $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ от Δx, разум-ся, уже не зависит, то произв-ая f'

ф-ии f зависит только от парам-ра x: $f' = f'(x)$. Заметим также, что производная $f'(x)$ может быть опр-на не при всех x из (a,b) (и даже может не сущ-ть ни при одном зн-ии x), $\overbrace{\quad}^{\text{иными словами}}$ $D_{f'} \subset D_f = (a,b)$ и при этом вполне может $\neq (a,b)$ (т.е. быть лишь частью этого интервала)

Примеры

1) Ф-я $y = \sin x$. Имеем

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) =$$

У нас есть асимптот-я ф-ла для $\sin x$, $x \to 0$. В данном случае в роли x выступает $\frac{\Delta x}{2} \to 0$

$$= 2\left(\frac{\Delta x}{2} + \underbrace{\bar{\bar{o}}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}_{=\bar{\bar{o}}(\Delta x)}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

– я напомню, что $\bar{\bar{o}}(c \cdot \Delta x) = \bar{\bar{o}}(\Delta x)$ и что $c \cdot \bar{\bar{o}}(\Delta x) = \bar{\bar{o}}(\Delta x)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(1 + \frac{2\bar{\bar{o}}(\Delta x)}{\Delta x}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \to 0, \quad \Delta x \to 0$$

Итак, $(\sin x)' = \cos x$

2) Ф-я $y = \ln x$, $x > 0$. Имеем

1 + "нечто малое" $(\to 0)$

$$\Delta y = \ln(x+\Delta x) - \ln x = \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{\Delta x}{x} + \bar{\bar{o}}(\Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} + \frac{\bar{\bar{o}}(\Delta x)}{\Delta x} \to 1, \quad \Delta x \to 0$$

(делить на x я уже не пишу, сразу заменяя $\frac{\bar{\bar{o}}(\Delta x)}{x}$ на $\bar{\bar{o}}(\Delta x)$)

Итак, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Заметим, что $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\ln a}$

возможность вынесения константы-множителя за знак производной будет обоснована ниже.

Задание. Получить производные остальных (кроме обратных тригон-х ф-й) элем-х ф-й (используя непосредственно замечат-ые пределы ~~или~~ асимптот-ие формулы, получаемые с помощью этих пределов)

Односторонние производные

Опр Если сущ-ет $\lim\limits_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv f'(x+0)$, то он наз-ся правой производной ф-ии $y=f(x)$ в т. x

Левая произв-я в т. x опр-ся ан-но

Пример $y=f(x)=|x|$. Найдём односторонние произв-ые в т. $x=0$

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=0} = \frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} +1, & \Delta x>0 \\ -1, & \Delta x<0 \end{cases}$$

Отсюда видно, что

$$f'(+0) = \lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = +1$$

$$f'(-0) = \lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$$

Заметим, что поскольку левый предел $\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq$ $\neq$ правому пределу, то "общего" предела при $\Delta x\to 0$ этого отношения не сущ-ет, ~~т.е. не~~ а значит не сущ-ет "общей" произв-й ф-ии f в т. $x=0$:

$f'(-0) \neq f'(+0) \Rightarrow \nexists f'(0)$

§2 Физический и геометрический смысл производной

Физический смысл

Пусть дана ф-я $x = f(t)$, где t - время, x - координата нек-й точки, движущейся вдоль оси x

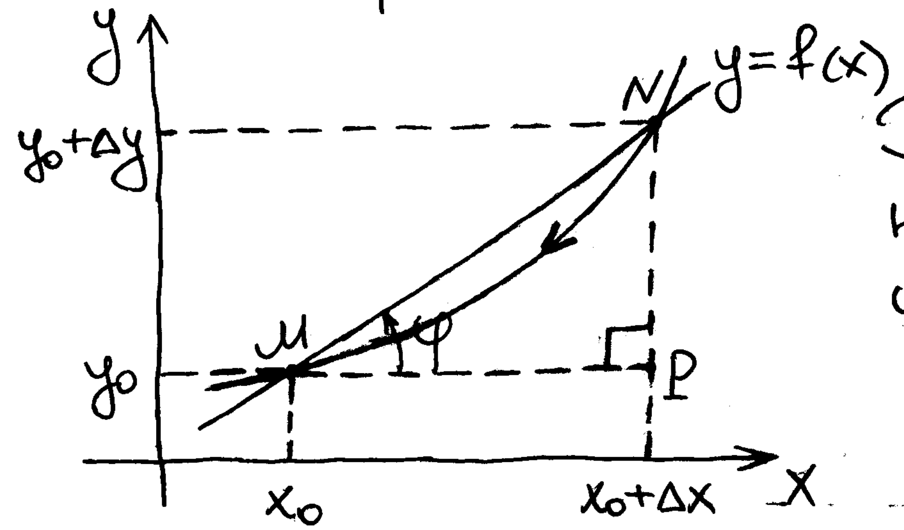
$v_{ср} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ - средняя скорость на отрезке времени от t до $t+\Delta t$

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{ср} \equiv v(t) = \dot{x}(t)$,

т.е. мгновенная скорость точки в некоторый момент времени t есть производная координаты x этой точки при данном t (в этом и состоит физич-й смысл произв-ой координаты x по времени t)

Однако произв-я имеет физич-й смысл не только, когда в роли аргумента выступает время, а роли ф-ии - координата. В общем случае зависимости между двумя величинами y и x (могущими иметь любой смысл): $y = f(x)$, произв-я $f'(x)$ характеризует скорость изменения величины y, вызываемого измен-ем величины x (скорость изм-я y относит-но изм-я x)

Геометрический смысл



Рассм-м график нек-й непрерывной ф-ии $y = f(x)$

Пусть $M(x_0, y_0)$ и $N(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y_0)$ – две точки этого графика (Δx может быть $\forall$ знака, но для наглядности мы изображаем случай, когда $\Delta x > 0$). Проведём прямую MN и построим ΔMNP (см. рисунок)

Прямая MN наз-ся секущей к графику ф-ии $y = f(x)$

Угол φ между секущей и осью x опред-ся из следующей системы

$$\varphi : \begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \\ \varphi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$ – угол между прямой MN и осью OX

Т.о., если $$\frac{\Delta y}{\Delta x} \begin{cases} > 0 \Rightarrow \varphi = +\angle NMP > 0 \\ < 0 \Rightarrow \varphi = -\angle NMP < 0 \\ = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \end{cases}$$

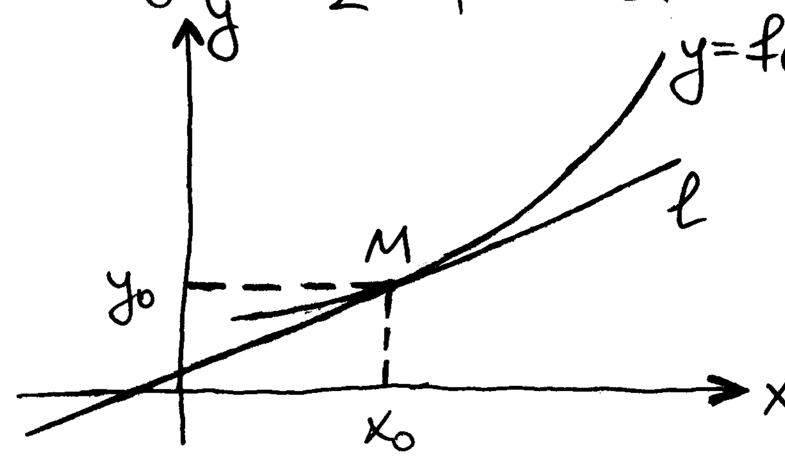
т.е. φ может быть положит-ым, отрицат-ым или равным нулю, но в любом случае по модулю $< \pi/2$ (острый): $|\varphi| < \pi/2$

$tg\,\varphi$ – угловой коэффициент прямой MN

Фиксируем x_0. Тогда $\varphi = \varphi(\Delta x)$ (точнее от x_0 величина φ, конечно, также зависит, но как от параметра, т.е. мы считаем, что при каждом x_0 у нас есть своя ф-я $\varphi(\Delta x)$)

Устремим $\Delta x \to 0$ (при этом точка N на графике устремится к т-ке M) и рассм-м предел угла наклона $\varphi(\Delta x)$

Пусть $\varphi(\Delta x) \to \varphi_0$ при $\Delta x \to 0$ (обращаю внимание на то, что в общем случае предела может и не сущ-ать). Заметим, что поскольку $-\frac{\pi}{2} < \varphi(\Delta x) < +\frac{\pi}{2}$, то в силу теоремы о двух полиц-х $-\frac{\pi}{2} \le \varphi_0 \le +\frac{\pi}{2}$



Предельным положением (при $\Delta x \to 0$) секущей MN явл-ся прямая l, называемая касат-й к графику ф-ии $y=f(x)$ в т. M

Более строгое опр-ие касат-ой выглядит след-им образом

$\boxed{9.18}$

Опр Если сущ-ет $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) \equiv \varphi_0$, то прямая l с угловым коэф-ом $k = \operatorname{tg} \varphi_0$, проходящая через т-ку $M(x_0, y_0)$, наз-ся касательной к графику ф-ии $y = f(x)$ в т. M

Пусть $\varphi_0 \neq \mp \frac{\pi}{2}$, т.е. график ф-ии имеет невертикальную касат-ую в т. M

Тогда $k = \operatorname{tg}\varphi_0 = \operatorname{tg} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi(\Delta x) =$

т.к. tg – непр-ая ф-я

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ – в этом как раз и состоит геометр-й смысл произв-ой, т.е. в том, что произв-я в т. x_0 равна угловому коэф-ту касат-й в т. $M(x_0, y_0)$