Лекция 10

На прошлой лекции мы установили, что если существует неверт-ая касат-ая к графику ф-ии в т. $M(x_0, y_0)$, то эта ф-ия имеет произв-ую в т. x_0, причём $f'(x_0) = k$ - угловому касат-ой. Оказ-ся, справедливо и обратное утв-ие

Утв Если ф-я $y = f(x)$: сущ-ет $f'(x_0) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ график ф-ии имеет касат-ую в т. $M(x_0, y_0)$, причём угловой коэфф-ент касат-й $k = f'(x_0)$

Δ Док-ть самост-но

<u>Уравнение</u> <u>касательной</u>

В заключение §-фа запишем ур-ие касат-ой к графику ф-ии $y = f(x)$.

Пусть x и y - координаты произвольной точки касат-ой (x и y: $N(x,y) \in l$). Напомню, что ур-ие прямой, проходящей через т-ку $M(x_0, y_0)$ и имеющую угловой коэф-ент k имеет вид:

$$y - \underset{f(x_0)}{\underset{\shortparallel}{y_0}} = \underset{f'(x_0)}{\underset{\shortparallel}{k}}(x - x_0)$$

В нашем случае $y_0 = f(x_0)$, $k = f'(x_0)$, поэтому данное ур-ие принимает вид:

$$\underline{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)} \leftarrow \text{искомое ур-ие кас-й к гр-ку ф-ии } y=f(x) \text{ в т. } M(x_0, f(x_0))$$

§3 Определ-ие дифференцируемости | 10.2

Общее опр-ие диффере-ти предварим одним наглядным примером

Пусть $y = f(x) = x^{\sqrt{2}}$. Рассм-им

$$f(1+\Delta x) = (1+\Delta x)^{\sqrt{2}} = 1 + \underset{f'(1)}{\underset{\parallel}{\sqrt{2}}}\,\Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x) \leftarrow \text{цуб-ая асимпт-я формула}$$

Дополн-но:

Если не сказано явно в какой точке та или иная ф-я $= \bar{\bar{o}}(x)$, то подраз-ся, что она $= \bar{\bar{o}}(x)$ в т. $x = 0$. Напр, запись $\bar{\bar{o}}(\Delta x)$ по умолчанию означает $\bar{\bar{o}}(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$

Замечая, что $1 = f(1)$, имеем ~~последнее соотн-ие предст~~

$$f(1+\Delta x) - f(1) = \underline{\Delta y = \sqrt{2}\,\Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x)}, \text{ при } \Delta x \to 0 \text{ и } x = 1$$

Последнее соотн-ие предст-ет собой асимпт-ую формулу для приращения Δy ф-ии $f(x)$ при $\Delta x \to 0$ и $x = 1$

Возникает вопрос: для каких ф-й $f(x)$ и при каких знач-ях x её арг-та можно написать подобную асимпт-ую формулу? Прежде чем отвечать на этот вопрос, сформулируем опр-ие, в котором дадим назва-ние для ф-й, допускающих такое представление

Опр Ф-ия $y=f(x)$ наз-ся дифф-ой в т-ке x, если её приращение в этой т-ке можно представить в виде

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x,$$

где A – нек-ое число, а $\alpha(\Delta x)$ – б.м. при $\Delta x\to 0$

Зам 1 В опр-ии ничего не говорится о единств-ти постоянной A — формально таких постоянных может быть сколь угодно (и даже ∞-но) много. Но даже если константа A, ~~представл~~ опред-ющая асимпт-ую формулу для Δy, всегда одна (ниже будет показано, что действ-но так), то при разных x её величина может быть различна (т.е., если ф-я $f(x)$ дифф-ма, скажем, в тт. x_1 и x_2, то константы A у асимптотических формул для приращений ф-ии в тт. x_1 и x_2, вообще говоря, различны):

$A = A(x)$ ← т.о., A постоянно лишь в том что не зависит от Δx

Зам 2 $\alpha(\Delta x)\to 0$, $\Delta x\to 0$, но это не означает, что $\alpha(0)=0$, т.к. б.м. в т-ке $\Delta x=0$ ф-я вполне может быть разрывна в этой точке. Заметим, что $\Delta y=0$ при $\Delta x=0$ независимо от того, чему равно $\alpha(0)$. Тем не менее, мы потребуем, чтобы $\alpha(0)=0$. Это соглашение, никак не отражаясь на существе опр-ния, позволяет упростить док-во теоремы о диф-ти сложной ф-ции

Зам 3 $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x=\bar{\bar{o}}(\Delta x)$ (по опр-нию $\bar{\bar{o}}$-го), т.е. условие диф-ти ф-ции $f(x)$ можно также представить в виде

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+\bar{\bar{o}}(\Delta x),\quad \Delta x\to 0$$

(при этом мы считаем, что $\bar{\bar{o}}(\Delta x)$ при $\Delta x=0$ обращ-ся в нуль: $\bar{\bar{o}}(0)=0$)

Т.о., диф-сть ф-ции в нек-й точке означает справ-ть для её приращ-ия в этой точке асимпт-ой формулы специального вида (линейной по Δx). Напр, вновь обращаясь к ф-ции $y=x^{\sqrt{2}}$, мы видим, что она диф-ма в т-ке $x=1$ и при этом константа $A=\sqrt{2}$

Вернёмся к вопросу о том, для каких ф-й $f(x)$ и при каких x возможно подобное асимпт-ое предст-ие, т.е. (согласно ~~новому~~ последнему опр-нию) к вопросу о том явл-ся ли та или иная ф-я диф-й в нек-й точке.

Оказ-ся, сущ-ет очень простой крите- **10.5**
рий (т.е. необход-ое и дост-ое усл-ие) диф-ти ф-ии

Теорема

Диф-ть ф-ии f в т. x $\Longleftrightarrow$ Сущ-ние произв-ой ф-ии f' в т. x

$\square$

I) Сущ-ие $f'(x)$ $\Rightarrow$ диф-ть f в т. x

Δ $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, α – б.м. при $\Delta x \to 0$

Т.о., при $\Delta x \neq 0$

$$\Delta y = \underbrace{f'(x)}_{\equiv A} \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

Но при $\Delta x = 0 \Rightarrow \Delta y \equiv f(x+0) - f(x) = 0$, а значит и при $\Delta x = 0$ это представление спр-во $\blacksquare$

II) Диф-ть f в т. x $\Rightarrow$ Сущ-ие $f'(x)$

Δ $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$

Отсюда при $\Delta x \neq 0$ получаем

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ – б.м. при $\Delta x \to 0$

$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} \to A$, $\Delta x \to 0$

То, что $\Delta x \neq 0$ не страшно, т.к. когда мы берём предел от $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ~~то расс-ем~~ эту дробь мы расс-ем при $\Delta x \neq 0$

Т.о., сущ-ет $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = A$

$\blacksquare$

Может возникнуть вопрос: а зачем нам нужно понятие диф-ти ф-ии, если диффер-ть ⟺ сущ-ию произв-ой? Нельзя ли обойтись одним лишь понятием произв-ой?

В одномерном случае, т.е. в случае ф-й одного арг-та (который мы сейчас и изучаем) в принципе можно. ~~Тем не менее~~ Но существуют, по крайней мере, две причины, по которым такое дублирование понятий целесообразно.

Во-первых, в случае функций двух и большего числа аргументов диф-ть ф-ии (соотв-м образом обобщ-ая на ф-ии произвольного числа арг-в) уже не равносильна сущ-ию произв-ых по этим аргументам. Т.о., ради сохр-ия единства с многомерным случаем, опр-ие диф-ти уместно ввести и для ф-й одного арг-та (несмотря на то, что для них она эквив-на сущ-ию производной) — было бы странным, если бы у нас ~~было~~ имелось понятие диф-ой ф-ии, скажем, двух арг-ов, но не было понятия диф-ой ф-ии одного арг-та

Во-вторых, ~~опр-ие диф-ти~~ при док-ве многих теорем (напр, т-мы о произв-ой сложной ф-ии) удобнее пользоваться именно опр-ем диф-ти, а не опр-ем произв-ой (кроме того, по форме оно удобнее и с точки зрения применения к приближённым вычислениям). Т.о., опр-ие диф-ти полезно и вне контекста взаимосвязи с ф-ми многих переменных

Зам 1 Ввиду док-й теоремы (т.е. ввиду равносильности $\exists$-ия произв-й и диф-ти ф-ии в т. x), вместо слов ф-ия имеет произв-ую в т. x, мы часто будем говорить – ф-я диф-ма в т. x (потому, что так короче)

Зам 2 Из док-ой теоремы видно, что константа **A** из условия диф-ти определяется единств-ым образом и равна $f'(x)$:

$A = f'(x)$ т.е. фактически расст-ся $\exists$-ие произв-й как синоним диф-ти

Следов-но, прираш-е Δy диф-ой в т. x ф-ии на самом деле имеет след-ий вид:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$$

Теорема

Диф-ть $f(x)$ в т. a $\Rightarrow$ ($\not\Leftarrow$) Непр-ть $f(x)$ в т. a

Δ Нам надо док-ть, что

$f(x) \to f(a)$, $x \to a$

Сделаем замену перем-ой, перейдя от предела по x к пределу по Δx

$\Delta x = x - a \to 0$, $x \to a$

Получим

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(a+\Delta x) \overset{\text{должен равняться}}{=} f(a),$$

или

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(a+\Delta x) - f(a)] \equiv \boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0}$$

Последнее усл-ие наз-ся разностной (т.к. Δy – это разность $f(a+\Delta x)$ и $f(a)$) формой усл-я непр-ти ф-ии $y = f(x)$ в т. a

Но справедл-ть этого соотн-ия сразу же следует из опр-я диф-ти в т. a ф-ии $y = f(x)$

$$\Delta y = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{0} + \underbrace{\bar{o}(\Delta x)}_{0} \to 0, \quad \Delta x \to 0 \quad \not\Delta$$

Зам-ие. Непр-ть $\overset{\text{не влечёт}}{\not\Rightarrow}$ Диф-ть. Напр, ф-я $y = |x|$ непр-на в т. $x = 0$, но не имеет произв-й, т.е. не диф-ма в этой точке

Дифференциал функции

Рассм-им ещё раз прираш-е Δy нек-ой диф-ой в т. x ф-ии $y = f(x)$ независ-й перем. x

$$\Delta y = \underbrace{f'(x)\cdot\Delta x}_{} + \bar{\bar{o}}(\Delta x)$$

← линейная относительно Δx часть приращ-я Δy (при фиксир-м x линейн-я ф-я Δx)

Её обозначают через dy:

$$dy \equiv f'(x)\,\Delta x$$

и наз-ют диф-ом ф-ии $y=f(x)$ в т. x

Если $f'(x)\neq 0$, то dy хоть и $\to 0$ при $\Delta x\to 0$, но при этом $\gg \bar{\bar{o}}(\Delta x)$:

$$dy \gg \bar{\bar{o}}(\Delta x),\ \Delta x\to 0,$$

а поэтому в случае $f'(x)\neq 0$ диф-л dy наз-~~ся~~ют также главной частью приращ-я Δy ф-ии $y=f(x)$

Введём понятие диф-ла незав-й перем-ой. Положим по опр-ю

$dx \equiv \Delta x$ — диффер-ал незав-й пер-ой x

$$\Rightarrow \boxed{dy = f'(x)dx}$$

Заметим, что это выр-ие, введённое нами для случая независимой перем-ой x, остаётся в силе и тогда, когда перем-ая x сама явл-ся ф-ей нек-ой перем-ой (т.е. является зависимой перем-ой). Такая универсальность выр-ия для dy, носящая название инвариантности ~~пер~~ формы первого диф-ла (об этой инвар-ти ещё предстоит более подробный разговор) на самом деле явл-ся прямым следствием ~~введённого~~ данного нами опр-ия диф-ла незав-ой перем-ой, т. е. того, что $dx \equiv \Delta x$. Можно было бы поступить и наоборот: постулировать инв-ть формы 1-го диф-ла и из этого постулата вывести выражение для dx, т.е. док-ть, что $dx = \Delta x$

Из выр-ия для dy получается, что при $dx \neq 0$

$f'(x) = \frac{dy}{dx}$ – читается: dy по dx

Подчеркну дополн-но, что было бы неверным воспринимать это рав-во как введение ещё одного обозн-ия для произв-ой ф-ии f (т.е. как рав-во по опр-ию). Его справ-ть вытекает из опр-ий диф-ов dy – завис-й и dx – независ-й перем-х

Примеры

1) Пусть $y = f(x) = x^2$

$dy = d(x^2) = (x^2)' dx = 2x\, dx$

не путать с $dx^2 \equiv (dx)^2$

В частности,

$dy\big|_{x=1} = \overset{f'(1)}{2}\, dx$, т.е., как и должно быть,

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = 2 = f'(1)$$

Зам-ие. Не следует считать, что dx и dy обязат-но малы — на самом деле они могут равн-ся чему угодно. Напр, в двух последних равенствах можно положить

$dx = 1000 \Rightarrow dy = 2000$

$dx = 0{,}01 \Rightarrow dy = 0{,}02$

Разум-ся, в любом случае, т.е. при любом значении dx, отношение dy к dx даёт нам величину производной

2) Пусть $y = f(x) = \sqrt{x}$

С помощью дифф-ла найдём приближённое зн-ие $\sqrt{3{,}96}$: $\sqrt{3{,}96} = ?$

Мы знаем, что $\sqrt{4} = 2$, поэтому удобно считать, что $x = 4$, $\Delta x = -0{,}04 \Rightarrow x + \Delta x = 3{,}96$

Далее,

$$\Delta y = \overbrace{f(4+\Delta x)}^{\sqrt{3{,}96}} - \overbrace{f(4)}^{\sqrt{4}=2} = \overbrace{f'(4)\cdot\Delta x}^{dy} + \bar{\bar{o}}(\Delta x)$$

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=4} = \frac{1}{4}$$

в дальнейшем с помощью формулы Тейлора мы научимся оценивать погрешности подобных приближений

$$\sqrt{3{,}96} = f(4+\Delta x) \;\; f(4) + f'(4)\Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x) \approx$$

$$\approx 2 + \frac{1}{4}(-0{,}04) = 2 \underbrace{-0{,}01}_{dy\text{ — поправка к } y=2} = 1{,}99$$

↑

после подстановки на место Δx его зн-ия $(-0{,}04)$ писать $+\bar{\bar{o}}$-ое, т.е. $+\bar{\bar{o}}(-0{,}04)$, уже некорректно, т.к.

не имеет смысла говорить о том, что то или иное слагаемое $= \bar{\bar{o}}(\Delta x)$ при фиксированном Δx. Мы можем сказать, что некоторая величина ~~=~~ составляет $\bar{\bar{o}}(\Delta x)$ только рассматривая её как ф-цию Δx и ~~устремляя~~ уменьшая неограниченно этот аргумент, т.е. устремляя $\Delta x \to 0$

Физический смысл диф-ла

Пусть известно, что скорость автомобиля в некоторый момент времени t равна 80 км/ч. Вопрос: что такое в данном случае 80 км и что такое 1 час?

Как известно, 80 км — это длина воображаемого пути, который бы проехал автомобиль, если бы он в течении одного часа двигался с постоянной скоростью, равной мгновенной скорости в начальный момент времени t_0. Разум-ся, в реальности ему заведомо не удастся проехать в течении всего часа (да, впрочем, и в течении любого другого отрезка времени тоже) с постоянной скоростью v — даже если водитель очень захочет — технически это принципиально неосуществимо (не говоря уж о том, что помешает рельеф местности, городская застройка, кривизна поверхности Земли, инспектор может остановить, в конце концов, и т. д. и т. п.)

Запишем в дифференциалах выражение для скорости v. Пусть автомобиль движется вдоль оси y по закону $y = f(t)$

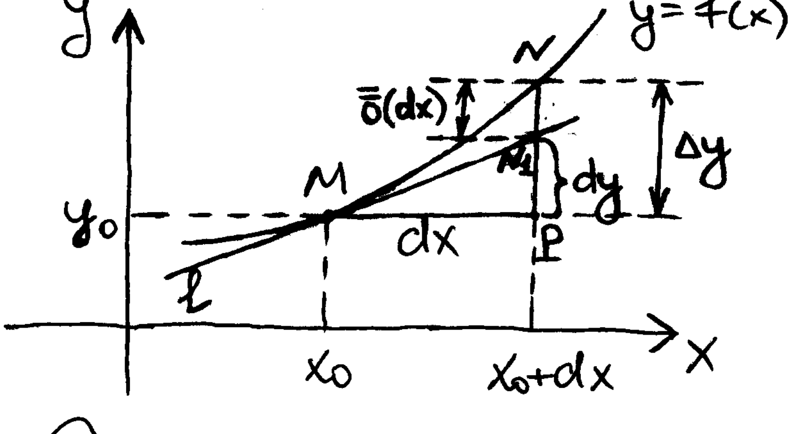
$$\Rightarrow v = \frac{dy}{dt} = \frac{80\text{ км}}{1\text{ ч}} = \frac{40\text{ км}}{0{,}5\text{ ч}}$$

В первом случае $dt = 1$ ч, $dy = 80$ км

Во втором случае $dt = 0{,}5$ ч, $dy = 40$ км

Итак, $dy|_{t=t_0}$ – это то, насколько изменилась бы величина $f(t)$ на промежутке $[t_0, t_0+dt]$, если бы скорость её изм-ия на нём была пост-ой и $= f'(t_0)$

Геометрический смысл диф-ла



$PN_1 = \operatorname{tg}\varphi_0\, dx =$

$= f'(x_0)dx = dy$

↑ по геометр-му смыслу производной

Т.е. $dy|_{x_0}$ – это то, чему равнялось бы $\Delta y|_{x_0}$, если бы график ф-ии $y=f(x)$ совпадал с прямой l – касат-й к этому графику в т. $M(x_0, y_0)$

(§4) Правила дифференц-ия

Теорема. Если ф-ии $u(x)$ и $v(x)$ диф-мы в т. x, то ф-ии $u(x) \pm v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$, а если $v(x) \neq 0$, то и $u(x)/v(x)$ также диф-мы в т. x, причём

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Δ 2) Пусть $y(x) = u(x)v(x)$. Тогда

$\Delta y = u(x+\Delta x)\,v(x+\Delta x) - u(x)\,v(x)$

Т.к. $\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x)$, а значит

$u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u$,

и аналогично

$v(x+\Delta x) = v(x) + \Delta v$,

то $\Delta y = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv = (\Delta u)v + u(\Delta v) + (\Delta u)(\Delta v)$

Разделив последнее рав-во на Δx, будем иметь

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{\frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'} v + u \underbrace{\frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'} + \underbrace{\frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'} \underbrace{\frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'} \underbrace{\Delta x}_{0} \to u'v + uv'$$

при $\Delta x \to 0$

Сл-но предел левой части (т.е. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$) также сущ-ет, причём ~~Но с другой стороны~~ по опр-ию произв-ой

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = (uv)' \Rightarrow (uv)' = u'v + uv'$ $\blacktriangle$ 2)

Формулы 1) и 3) док-ть самост-но (в отличие от случая с теоремой об арифм-х операциях над ф-ми, имеющими пред-ое значение, док-во утв-ия для частного в качественном отношении не сложнее док-ва утв-ия для произведения)

Примеры

1) $(\underset{\text{const - не зависит от } x}{c} \cdot y(x))' = \cancel{c'}^{\,0} \cdot y + c \cdot y' = c \cdot y'(x)$

(т.е. constanty-множитель можно выносить за знак произв-ой)

2) $(tg\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(ctg\,x)' = \text{—"—} = -\frac{1}{\sin^2 x}$

расписать самост-но

Зам-ие. Последние две произв-ые достаточно просто выводятся и из асимптот-их формул, но с помощью формулы для произв-ой частного результат получается ещё быстрее

§5 Производная обратной ф-ии

Теорема (о произв-ой обр-ой ф-ии)

Пусть ф-я $y = f(x)$:

1) определена
2) строго монотонна
3) ~~диф-ма~~ непр-на

в нек-ой окр-ти т. x_0

4) диф-ма в т. x_0 ← т.е. сущ-ет $f'(x_0)$ и $f'(x_0) \neq 0$ | 10.16

Тогда 1) найдётся такая окр-ть т. $y_0 = f(x_0)$, в которой сущ-ет $x = f^{-1}(y)$

2) $f^{-1}(y)$ диф-ма в т. y_0 ← т.е. сущ-ет $(f^{-1}(y_0))'$ и $(f^{-1}(y_0))' = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

производная ф-ии f^{-1} в т. y_0

Δ Докажем в след-ий раз