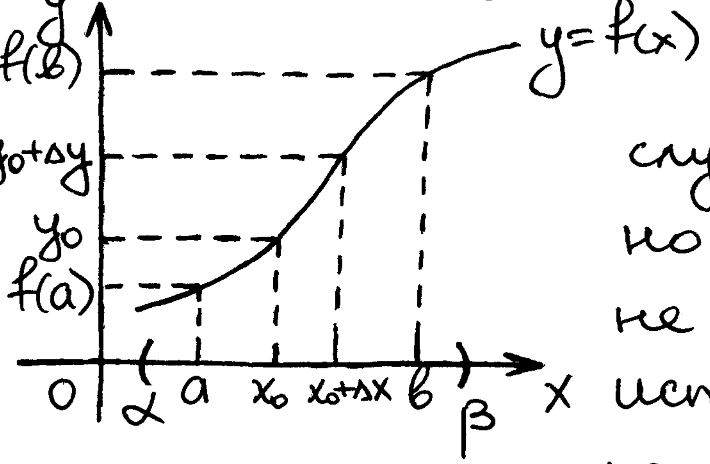
Лекция 11

В конце прошлой лекции я сформулировал теорему о произв-ой сложной ф-ии. Теперь док-ем эту теорему

Δ Чтобы сделать док-во более наглядным, сопроводим его изображением графика подходящей (т.е. удовл-ей усл-ям теоремы) ф-ии



На рисунке изображён случай возрастающей ф-ии, но для нашего док-ва это не принципиально – оно использует лишь строгую монот-ть (т.е. ф-я вполне может и убывать)

Δ1) Пусть (α,β) – окрестность т. x_0, в кот-ой выполнены усл-я 1)–3) доказываемой теоремы (в самой точке x_0 вып-но усл-ие 4))

Расcм-м любой отр-к $[a,b]$: $x_0 \in [a,b] \subset (\alpha,\beta)$

~~Заметим, что~~ Тогда, на отр-ке $[a,b]$ также выполнены усл-ия 1)–3) настоящей теоремы (ф-я определена, строго монотонна и непр-на). Но т.к. эти усл-я одновр-но явл-ся усл-ми теоремы о существ-ии обратной ф-ии, то:

1) $x \in [a,b] \equiv X \Leftrightarrow y \in [f(a), f(b)] \equiv Y$ **11.2**

Иными словами, если мы рассм-ем ф-ю $f(x)$ на отр-ке X, то мн-м её знач-й явл-ся отр-к Y, т.е. если $D_f \equiv X$, то $E_f = Y$ (дальше только на этом отр-ке её и рассм-ем)

2) сущ-ет $x = f^{-1}(y)$: $D_{f^{-1}} = Y$

3) f^{-1} строго монотонна } на Y

4) f^{-1} непрерывна ~~на~~ }

Для завершения док-ва первой части теоремы остаётся заметить, что поскольку $a < x_0 < b$, то $f(a) < f(x_0) = y_0 < f(b)$, т.е. $y_0 \in (f(a), f(b)) \subset Y = D_{f^{-1}}$

Т.о. получается, что обратная ф-я $x = f^{-1}(y)$ опред-на в окр-ти $(f(a), f(b))$ точки y_0 Δ 1)

Зам 1 В начале док-ва мы искусственно сузили обл-ть опр-я ф-ии f с интервала (α, β) до отр-ка $[a,b]$. Это связано с тем, что теорема о сущ-ии обр-ой ф-ии, на которую мы опирались, была сформулирована и док-на для случая ф-ии, опред-ой ~~не~~ именно на отр-ке. Соотв-но в конце док-ва нам также пришлось ~~ещё~~ ~~раз~~ искусственно сужать ещё и обл-ть опр-я ф-ии f^{-1}

~~интервала~~ с отр-ка $[f(a), f(b)]$ до интервала $(f(a), f(b))$, т.к. нам формально требовалось док-ть, что обр-ая ф-я опр-на в нек-й окр-ти т. y_0, т.е. на нек-ом интервале (а не отр-ке!), содерж-ем эту точку. Впрочем, если ~~бы мы~~ распространить теорему о сущ-ии обратной ф-ии на случай ф-ии, опред-ой на инт-ле, то указанных манипуляций можно избежать (~~не~~ при этом мы сразу получаем обратную ф-ю f^{-1}, опр-ую в окр-ти $(f(a), f(b))$ точки y_0)

Зам 2 На самом деле мы док-ли даже больше, чем требуется, а именно, мы доказали, что обр-ая ф-я f^{-1} не ~~только~~ просто сущ-ет, но и обладает свойствами строгой монот-ти и непр-ти в окр-ти $(f(a), f(b))$ точки y_0 (см. 3) и 4)). Тем не менее, эти результаты также необх-мы, т.к. ~~использования~~ будут использованы во второй части док-ва теоремы

Δ2) Пусть ~~Δy~~ $\Delta y \neq 0$ мало настолько, что:

$y_0 + \Delta y \in (f(a), f(b)) \subset Y = D_{f^{-1}}$

Будем рассм-ать Δy как приращение в т. y_0 арг-та обр-ой ф-ии $x = f^{-1}(y)$. Тогда прираищение ~~Δy~~ Δx этой ф-ии равно

$\Delta x = f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0) = \Delta x(\Delta y)$

~~Поскольку~~ Из того, что $y_0+\Delta y \neq y_0 \Rightarrow f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta x \neq 0$ т.к. f^{-1} строго монотонна

Отсюда вытекает, что отношение $\frac{\Delta x(\Delta y)}{\Delta y}$ можно представить в виде

$$\frac{\Delta x(\Delta y)}{\Delta y} \equiv \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x(\Delta y)}} \quad \Delta x \neq 0 \quad \text{тождество по } \Delta y \qquad (*)$$

Если существует отличный от нуля предел знаменателя последней дроби при $\Delta y \to 0$ (т.е. предел $\frac{\Delta y}{\Delta x(\Delta y)}$), то по теореме о пределе частного существ-т и предел всей дроби, равный единице, делённой на предел знамен-ля

В свою очередь, чтобы решить вопрос о существ-ии предела знам-ля и найти величину этого предела, сделаем замену переменной, перейдя от предела по Δy к пределу по Δx, для чего прежде всего выразим Δy через Δx

~~$f^{-1}(y_0+\Delta y) = f^{-1}(y_0)+\Delta x$~~ Из опр-я Δx следует, что

$f^{-1}(y_0+\Delta y) = f^{-1}(y_0)+\Delta x = x_0+\Delta x \quad \} f(\ )$

$y_0+\Delta y = f(x_0+\Delta x)$

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \Delta y(\Delta x)$

Т.о., мы убедились в том, что если $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ есть приращение обр-й ф-ии, отвечающее Δy, то Δy — это прираще-ие исходной ф-ии, отвечающее прир-ию Δx (впрочем, у приведённого выше рисунка это видно сразу)

При этом, ~~Т.е.~~ мы фактически решили уравнение (причём однозначно) $\Delta x = \Delta x(\Delta y)$ относит-но Δy: обратные ф-ии как бы сокращаются

$$\Delta x = \Delta x(\Delta y) \Leftrightarrow \Delta y = \Delta y(\Delta x) : \Delta x(\Delta y(\Delta x)) \equiv \Delta x$$

Далее следуют два варианта продолжения док-ва теоремы

Вариант для лекций (более короткий, но менее строгий, предполагающий умение ~~дать~~ давать обоснование некоторым внешне очевидным, но по существу требующим дополнительного док-ва переходам)

Заметим, что

$$\Delta x = f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0) \to 0, \ \Delta y \to 0,$$

т.к. f^{-1} по доказ-му ранее (в части 1) — непрерывная ф-я

Тогда, беря предел от правой части тождества (*) и подставляя на место Δy его выражение через Δx: $\Delta y = \Delta y(\Delta x)$, получаем

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x(\Delta y)}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x(\Delta y)}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(\Delta x)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Но раз сущ-ет предел правой части **11.6**
≡-ва (*), то ~~сущ-ет~~ предел его левой части
также сущ-ет и равен пределу правой части

$$\underbrace{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x(\Delta y)}{\Delta y}}_{\equiv f^{-1}(y_0)'} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Напомню, что $f'(x_0)$ по предполож-ю теоремы $\neq 0$

$\equiv f^{-1}(y_0)'$ – но с другой стороны этот предел по опред-ию произв-ой равен произв-ой обр-ой ф-ии $x = f^{-1}(y)$ в т. y_0

Итак, мы установили, что произв-ая обр-ой ф-ии в т. y_0 сущ-ет и равна $1/f'(x_0)$:

$$\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{чтд} \qquad \cancel{\Delta}\,2)$$

Теорема о произв-ой обр-ой ф-ии полностью док-на $\cancel{\Delta}$

Дополн-но

(Второй вариант (более честный) продолжения ~~окончания~~ док-ва теоремы о произв-ой обр-ой ф-ии):
~~Т.о.~~ При этом мы фактически решили (причём однозначно) ур-ие $\Delta x = \Delta x(\Delta y)$ отн-но Δy:

$$\Delta x = \Delta x(\Delta y) \Leftrightarrow \Delta y = \Delta y(\Delta x): \quad \Delta y(\Delta x(\Delta y)) \equiv \Delta y$$

обр-ые ф-ии как бы сокращ-ся

~~Т.о., ф-ии~~ (Можно ещё сказать, что мы убедились в том, что ~~ф-ии~~ $\Delta y(\Delta x)$ и $\Delta x(\Delta y)$ явл-ся взаимно обратными ф-ми.)

Заметим, что

$\Delta x = f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0) \to 0,\ \Delta y \to 0,$

т.к. f^{-1} по доказ-му ранее (в части 1) - непрерывная ф-я

Тогда, беря предел от правой части тождества (*) и делая замену переменной под знаком предельного перехода (т.е. переходя от предела по Δy к пределу по Δx), имеем

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x(\Delta y)}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y(\Delta x(\Delta y))}{\Delta x(\Delta y)}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y(\Delta x)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Зам На самом деле у нас не было теоремы о пределе сложной ф-ии $f(g(x))$, у которой образующие её ф-ии f и g имеют пределы в соотв-х точках (а здесь бы она как раз сработала), так что предложенный трюк с заменой переменной тоже не вполне строг. Но зато у нас была теорема о непр-ти сложной ф-ии, которая легко позволяет сделать наше док-во "абсолютно строгим". Для этого дост-но доопред-ть ф-ю $\frac{\Delta y}{\Delta x}(\Delta x)$ в точке $\Delta x = 0$ её предельным зн-ем $f'(x_0)$: $\frac{\Delta y}{\Delta x}(0) \equiv f'(x_0)$. Тогда в силу неп-

неп-ти ф-ии $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в т. $\Delta x = 0$ и ф-ии $\Delta x(\Delta y)$ в точке $\Delta y = 0$ на основании теоремы о непрер-ти сложной ф-ии будет следовать, что ф-я

$\frac{\Delta y(\Delta x(\Delta y))}{\Delta x(\Delta y)} \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x}(\Delta x(\Delta y))$ непр-на в точке $\Delta y = 0$,

а значит $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x(\Delta y)} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y(\Delta x(\Delta y))}{\Delta x(\Delta y)} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}(\Delta y(\Delta x)) =$

$= \frac{\Delta y}{\Delta x}(\Delta y(0)) = \frac{\Delta y}{\Delta x}(0) = f'(x_0)$

Но раз сущ-ет предел правой части $\equiv$-ва $(*)$, то — и — (см. окончание первого варианта)

Пример

Рассм-м ф-ю $y = f(x) = \sin x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$

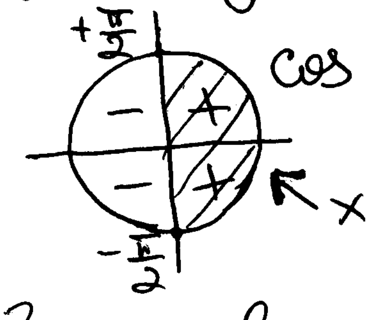
При данных x эта ф-я опр-на, возр-ет и непр-на, и, кроме того,

$f'(x) = \cos x > 0$ (для нас главное, что $\neq 0$)

Тогда из док-ой только что теоремы вытекает сущ-ие $x = f^{-1}(y) \equiv \arcsin y$, $y \in (-1, +1)$, причём

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$(\sin x = y)$



$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x = +\sqrt{1 - \sin^2 x}$

Заменив $y \to x$, оконч-но получим $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Задание. Вывести

а) Произв-ые остальных arc-функций

б) Произв-ую показат-ой ф-ии, рассм-ой как обратной по отношению к ф-ии $y=\log_a x$, т.е.: считая изв-ой произв-ую ф-ии $y=f(x)=\log_a x$, получить пр-ую ф-ии $x=f^{-1}(y)=a^y$ (с дальнейшей заменой $y\to x$)

(Напомню, что пр-ую показ-ой ф-ии можно также получить, исполь-я соотв-ую асимптотич-ую формулу — с точки зрения сложности и объёма выкладок эти способы сопоставимы)

§6 Производная сложной функции

Рассм-м сложную ф-ю $y=f(x)$, где $x=\varphi(t)$, т.е. ф-ю $y=f(\varphi(t))\equiv h(t)$

Теорема ~~Пусть~~ (о произв-ой сложной ф-ии)

Пусть ф-ия $x=\varphi(t)$ диф-ма в т. t_0, а ф-я $y=f(x)$ диф-ма в т. $x_0=\varphi(t_0)$. Тогда сложная ф-я $h(t)=f(\varphi(t))$ диф-ма в т. t_0, причём

$$F'(t_0)=f'(x_0)\varphi'(t_0)=f'(\varphi(t_0))\cdot\varphi'(t_0)$$

Δ Из диф-ти ф-ии $x=\varphi(t)$ в т. t_0

$\Rightarrow \Delta x = \varphi(t_0+\Delta t) - \varphi(t_0) = \varphi'(t_0)\Delta t +$

$+\alpha(\Delta t)\cdot\Delta t = \underline{\Delta x(\Delta t)}$ — давайте подчеркнём (1)

где $\alpha(\Delta t)\to 0$, $\Delta t \to 0$ и $\alpha(0)=0$

Из дифф-ти ф-ии $y=f(x)$ в т. x_0

$\Rightarrow \Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \beta(\Delta x)\Delta x = \Delta y(\Delta x)$, (2)

где $\beta(\Delta x)\to 0$, $\Delta x\to 0$ и $\beta(0)=0$

Т.к. соотн-ие (2) справ-во при совершенно любом $\Delta x: x_0+\Delta x \in D_f$, то оно спр-во и при любом значении $\Delta x = \Delta x(\Delta t)$ из соотн-ия (1), где $\Delta t: t_0+\Delta t\in D_\varphi$ (напомню, что по опр-ию сложной ф-ии $E_\varphi = D_f$, а значит $x_0+\Delta x(\Delta t)$ заведомо $\in D_f$)

Теперь рассм-м приращ-ие ф-ии $y=h(t)$

$$\Delta y = h(t_0+\Delta t) - h(t_0) = f(\underbrace{\varphi(t_0+\Delta t)}_{\varphi(t_0)+\Delta x(\Delta t)}) - f(\underbrace{\varphi(t_0)}_{x_0}) =$$

$$= f(x_0+\Delta x(\Delta t)) - f(x_0) \overset{(2)}{=} f'(x_0)\Delta x(\Delta t) + \beta(\Delta x(\Delta t))\Delta x(\Delta t) \overset{(1)}{=}$$

$$= f'(x_0)[\varphi'(t_0)\Delta t + \alpha(\Delta t)\Delta t] + \beta(\Delta x(\Delta t))[\varphi'(t_0)\Delta t + \alpha(\Delta t)\Delta t] =$$

$$= f'(x_0)\varphi'(t_0)\Delta t + [f'(x_0)\alpha(\Delta t) + \beta(\Delta x(\Delta t))(\varphi'(t_0)+\alpha(\Delta t))]\Delta t$$

при $\Delta t\to 0$ 0 0 $[\ ]\equiv\gamma(\Delta t)$

Док-ем, что $\beta(\Delta x(\Delta t))$ действ-но $\to 0$ при $\Delta t\to 0$

Казалось бы: $\Delta x(\Delta t)\to 0$, $\beta(\Delta x)\to 0$, т.е. $\beta(\Delta x(\Delta t))=$ б.м.(б.м.) в т. $\Delta t=0$, а значит вроде бы должно $\to 0$ при $\Delta t\to 0$. Но дело в том, что б.м.(б.м.), вообще говоря, $\neq$ б.м.

Контрпример

Пусть $\Delta x(\Delta t)\equiv 0$, а $\beta(\Delta x)=\begin{cases}0, & \Delta x\neq 0\\ 1, & \Delta x=0\end{cases}$

Тогда $\Delta x(\Delta t)\to 0$ при $\Delta t\to 0$, $\beta(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$, но $\beta(\Delta x(\Delta t))\equiv\beta(0)=1\not\to 0$ при $\Delta t\to 0$

Т.о., мы не можем сказать, что $\overbrace{\beta(\Delta x(\Delta t))}^{\text{слож-ая ф-я}}\to 0$ при $\Delta t\to 0$ только потому, что составляющие её ф-ии $\beta(\Delta x)$ и $\Delta x(\Delta t)$ – б.м.
Для того, чтобы убедиться в этом, воспольз-ся теоремой о непр-ти сложной ф-ии

$$\begin{cases}\Delta x(\Delta t)\to 0=\Delta x(0), \ \Delta t\to 0 \leftarrow \text{т.е. ф-я } \Delta x \text{ непр. в т. } \Delta t=0\\ \beta(\Delta x)\to \underbrace{0=\beta(0)}, \ \Delta x\to 0 \leftarrow \text{т.е. ф-я } \beta \text{ непр. в т. } \Delta x=0\end{cases}$$

Согласно опр-ию диф-ти ф-ии $f(x)$ в т. $x=x_0$ (см. выше). Напомню, что в своё время мы специально так модифицировали опр-ие диффер-ти ф-ии (рас-ся, не изменяя его суть), чтобы фигурирующая в нём б.м. ф-я (в нашем случае $\beta(\Delta x)$) обращалась в нуль при нулевом значении приращения (т.е. была непр-на в точке нуль). Здесь мы впервые вос~~пользуемся~~ пользовались этим условием

$\Rightarrow$ (по теореме о непр-ти сложной ф-ии)

$\beta(\Delta x(\Delta t))$ и непр-на в т. $\Delta t = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \beta(\Delta x(\Delta t)) = \beta(\Delta x(0)) = \beta(0) = 0 \Rightarrow$$

(это самый тонкий момент док-ва)

$\Rightarrow [\ \ ] \equiv \gamma(\Delta t) \to 0,\ \Delta t \to 0$

Итак,

$$\Delta y = \underbrace{f'(\varphi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0)}_{\equiv A} \overbrace{\ }^{\Delta t} + \gamma(\Delta t) \cdot \Delta t,$$

как легко видеть из опр-ия $\gamma(\Delta t)$

где $\gamma(\Delta t)$ – б.м. при $\Delta t \to 0$ и $\gamma(0) = 0$, а значит ф-я $y = h(t)$ действ-но диф-ма в т. t_0, причём константа A из опр-я диф-ти равна

$$A = f'(\varphi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0)$$

Но с другой стороны A опр-ся !-ым образом и всегда равна произв-ой диф-ой ф-ии:

$A = h'(t_0)$, т.е.

$$h'(t_0) = f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0)$$

$\measuredangle$

Пример Найдём произв-ую ф-ии

$y(x) = u(x)^{v(x)}$, $u(x) > 0$

Ф-цию $y(x)$ наз-ют показ-но-степен- **11.13**
ной ф-ей (т.к. у этой ~~ф-ии~~ степени и осно-
вание, и показ-ль явл-ся перем-ми величин-ами)
Заметим, что ф-я $y(x)$ по сути является сло-
жной ф-ей переменной x, у которой "внеш-
няя" ф-я зависит от двух перем-х u и v:
$y = F(u(x), v(x))$, $F(u,v) = u^v$
Но мы пока что не умеем диф-ть такие
ф-ии, т.к. доказ-ая нами теорема о произв-ой
сложной ф-ии относится к случаю, когда
"внешняя" ф-ия зависит лишь от одного ар-
гумента: $y = F(\varphi(t))$
В след-ем семестре мы обобщим теорему о
произв-ой сложной ф-ии на случай многих
переменных и тогда сможем решить дан-
ную задачу, что назыв-ся "в лоб"
Однако продиф-ть ф-цию $y(x)$ можно и
не используя указанного обобщения (и это
хорошо, поскольку не хотелось бы откладывать
вопрос о поиске её произв-ой до след-го семе-
стра). Один из способов заключается в пред-
ставлении этой ф-ии в след-ем виде:

$y(x) = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u} \equiv e^{\varphi(x)}$

(напомню, что этим приёмом мы уже пользовались при обосновании непр-ти ф-ции x^x)

Тогда

$$y'(x) = (e^{\varphi})'\Big|_{\varphi=\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) = e^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) = \overbrace{e^{v \ln u}}^{u^v} (v \ln u)' =$$

$$= u^v (v' \ln u + v (\ln u)') = u^v \left(v' \ln u + \frac{v}{u} \cdot u'\right)$$

вновь диф-ем как сложную ф-ю

§7 Инвариантность формы первого дифференциала

Напомню, что диф-ал ф-ции $y(x)$ для случая, когда x – незав-ая перем-ая (т.е., образно выражаясь, для случая "простой" ф-ции $y(x)$), по опред-ию равен

(*) $dy = f'(x)dx$,

где $dx \equiv \Delta x$ – диф-ал незав-ой переменной

dy наз-ют также первым диф-ом ф-ции $f(x)$

Покажем, что выражение (*) для первого диф-ла остаётся в силе и в случае, когда перем-ая x сама явл-ся ф-ей независимой перем-ой t

Итак, пусть теперь $x = \varphi(t)$. Тогда y является сложной ф-ей аргумента t:

$\Rightarrow y = f(\varphi(t)) \equiv F(t)$

Поскольку t — незав-ая перем-ая, то согласно опред-ию диф-ла ф-ии независимого арг-та

$dy = F'(t)dt$, а $dx = \varphi'(t)dt$

Но по теореме о произв-ой сложной ф-ии

$F'(t) = f(\varphi(t))' = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, а поэтому

$dy = f'\underbrace{(\varphi(t))}_{x} \cdot \underbrace{\varphi'(t)dt}_{dx} = f'(x)dx$

Т. о.,

(*) $dy = f'(x)dx$, ← инвариантность формы первого дифференциала

даже когда $x = \varphi(t)$

Обнаруженная универсальность выр-ия (*) для первого диф-ла (т.е. его справедливость как для случая, когда x — незав-ый арг-нт, так и для случая, когда x — зависимая перем-ая) и наз-ют инвариант-ю формы первого диф-ла

Отметим, что если $x = \varphi(t)$, то

$\Delta x = \varphi'(t)dt + \bar{\bar{o}}(dt) = dx + \bar{\bar{o}}(dt) \neq dx$

↑ в общем случае

$\Rightarrow dy = f'(x)dx \neq f'(x)\Delta x$

Если же x – незав-ая перем-ая, то **11.16**
$dy = f'(x)\Delta x$
Именно поэтому, если мы хотим, чтобы первый диф-ал обладал свойством инвар-сти формы, то Δx в последнем случае следует обозначить за dx
Итак, мы видим, что
инвар-ть формы 1-го диффер-ла $\Leftrightarrow$ $dx \equiv \Delta x$ для независимой переменной x
Зам-ие. Из инв-ти формы 1-го диф-ла следует, что если $y = f(x) = f(\varphi(t))$, то
$$f'(x) \equiv f'(\varphi(t)) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy(x(t))}{dx(t)},$$
т.е., что произв-ая по арг-ту x ф-ии $f(x)$ равна отношению диф-ов и в том случае, когда x – ф-я некоторой независимой переменной t. (Можно сказать, что из инв-ти формы первого диф-ла $dy = f'(x)dx$ вытекает инв-ть формы (выраж-ия) $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ первой произв-ой.)
Сделаем ещё одно замеч-ие, которое касается двух последних теорем (о произв-ой обратной и сложной ф-й)

Если в этих теоремах для обозначения произв-ых использ-ть диф-лы, то выражения для производной обратной и сложной ф-й приобретут наглядный алгебраический смысл

$y=y(x),\ x=x^{-1}(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ ← числитель и знаменатель поделили на dy

$y=y(x(t)) \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$ ← числитель и знаменатель домножили на dx

Следует, однако, подчеркнуть, что подобными манипуляциями с диф-ми доказывать теоремы о произв-ой обр-ой и слож-й ф-й нельзя. Наоборот, именно эти теоремы позволяют обращаться с произв-ми, выраженными через отношения диф-ов, как с обыкновенными дробями

Дополн-но:

г В некоторых учебниках предлагается док-во того, что в случае независимой пер-ой x её приращ $\Delta x = dx$ (не связанное с инв-ю формы 1-го д-ла). ~~Для~~ Авторы рассм-ют ф-ю $y=x$ и записывают опр-ие диф-ла этой ф-ии: $dy = x'\Delta x = \Delta x$, откуда, поскольку $y=x$, приходят к выводу, что $dx=\Delta x$

Такое док-во нельзя признать удовлет- 11.18
вор-ым, т.к. оно опирается на весьма распро-
стран-ое, но не вполне корректное обозн-ие
ф-ии $f: x \to f(x)$ посредством её частного зна-
чения $f(x)$. Строго говоря, следовало бы писать

$f = \{(x,y) \mid x \in D_f, y = f(x)\}$ или $f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$, или
в крайнем случае $f = \{(x, f(x))\}$ (т.е. ф-я это на са-
мом деле мн-во упорядоченных пар $(x, f(x))$)
Разум-ся, все математики об этом знают, но
сознат-но исполь-т упрощ-ое обозн-ие $f(x)$ про-
сто в силу его краткости и удобства (похожая
ситуация сложилась и выр-ем $\int f(x)dx = F(x) + C$). Од-
нако с этим обозн-ем след-ет проявлять осторож-
ность, т.к. в нек-х тонких вопросах при его исп-ии
может получ-ся некор-ый результат
Вернёмся к диф-лу dx. Теперь мы видим, что
на самом деле всего лишь док-ли, что $d\{(x,x)\} =$
$= \Delta x$, но отнюдь не что $dx = \Delta x$, где x – незав-ый арг-т
В принципе нам ничто не мешало положить $dx \equiv$
$\equiv 2\Delta x$, просто тогда 1-й диф-л не обладал бы ~~св.~~ inv-ю формы.
При таком опр-ии, между прочим, нам пришлось бы
отличать dx, где x – незав-й арг-т, от dx, где x – ф-я
$f(x) = x$, и во избежание путаницы диф-л послед-й
обозн-ть хотя бы через $d(x)$ (подчеркну, что $d(x)$, по-прежнему $= \Delta x$)