Лекция 22

На прошлой лекции я успел сформулировать т-лу Тейлора и дать все необходимые комментарии и пояснения к ней:

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x),$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \ \xi \in (x_0, x)$$

Добавлю лишь, что эту ф-лу мы также будем называть формулой Тейлора $n$-го порядка (это уточнение необходимо для того, чтобы различать формулы с разными $n$)

Теперь мы можем док-ть справ-ть этой формулы

$\Delta$ Док-во ~~ф-лы~~ теоремы Тейлора

Воспользуемся методом математич-ой индукции

$1^\circ$ При $n=0$ ф-ла Тейлора принимает вид

$$f(x) = P_0(x) + R_1(x) = f(x_0) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-x_0)$$

Т.о., нам надо док-ть, что $\exists \xi \in (x_0, x)$:

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x-x_0)$$

Но последнее соотношение есть ни что иное как формула конечных приращений, а сущ-ие требуемого $\xi$ гарантирует т-ма Лагранжа

Итак, Тейлор при $n=0$ = Лагранж

(с остаточным членом в форме Лагранжа)

$2^\circ$ Пусть ф-ла Тейлора верна для $n-1$ $(n \geq 1)$:

$$f(x) = P_{n-1}(x) + R_n(x)$$

Док-ем, что в таком случае она будет справедлива и для номера $n$, т.е. док-ем, что если $f(x)$ $n+1$ раз диф-ма в $O_\delta(x_0)$, то

$$\exists \xi \in (x_0, x): \ f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

или

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \qquad (*)$$

Введём в рассм-ие ф-ии

$$F(x) \equiv f(x) - P_n(x) \quad \text{и} \quad G(x) \equiv (x-x_0)^{n+1}$$

Легко убедиться в том, что для этих ф-ий выполняются все усл-ия т-мы Коши на отр-ке $[x_0, x]$:

1) $F$ и $G$ опр-ны и непр-ны на $[x_0, x]$

2) $F$ и $G$ диф-мы на $[x_0, x] \supset (x_0, x)$ ← я напомню, что нам дост-но даже, чтобы они бы-

ми диф-мы всего лишь на интервале

3) $G'(\xi) = \cancel{n(\xi-x_0)}(n+1)(\xi-x_0)^n \neq 0$ при $\forall \xi \in (x_0, x)$

Тогда согласно этой теореме

$$\exists \xi_1 \in (x_0, x): \frac{F(x) - \cancel{F(x_0)}^{\,0}}{G(x) - \cancel{G(x_0)}_{\,0}} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}$$

напомню, что это рав-во наз-ют формулой Коши

Подставляя сюда выр-ия для $F(x)$ и $G(x)$ и замечая, что

$$F(x_0) = f(x_0) - P_n(x_0) = 0 \quad \text{и} \quad G(x_0) = (x_0 - x_0)^{n+1} = 0,$$

имеем

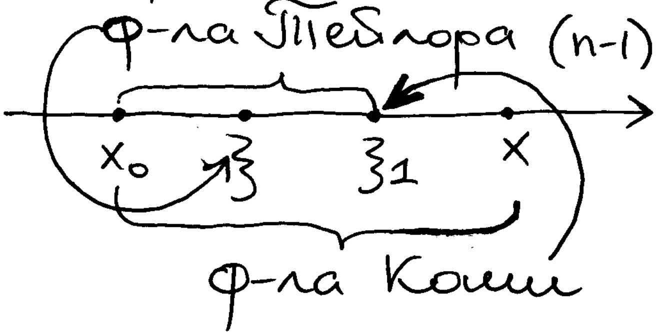
$$\frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f'(\xi_1) - P_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n} \qquad (1)$$

Настало время задействовать предположение индукции. Для этого произв-ую $f'$ ф-ии $f$ обозначим через $\tilde{f}$: $f'(x) \equiv \tilde{f}(x)$ и воспользуемся тем, что $P_n'(x) = \tilde{P}_{n-1}(x)$ – многочлену Тейлора $(n-1)$-го порядка для ф-ии $\tilde{f}(x)$, т.е. для $f'(x)$ (напомню, что мы уже убедились в этом замечании 2 к опр-ию многочлена Тейлора $P_n(x)$):

$$f'(x) \equiv \tilde{f}(x) \Rightarrow P_n'(x) = \tilde{P}_{n-1}(x)$$

Но поскольку $\tilde{f}(x) = f'(x)$ – $\overset{\text{по крайней мере}}{n}$ раз диф-ма в

$O_\delta(x_0)$ (на один раз меньше, чем сама ф-ия $f(x)$, а $f(x)$ по условию теоремы диф-ма (по крайней мере) $n+1$ раз) и $\xi_1 \in O_\delta(x_0)$, то для ф-ии $\tilde{f}(x)$ по предположению индукции спр-ва ф-ла Тейлора $(n-1)$-го порядка с центром в т-ке $x_0$ и $x = \xi_1$, т.е.




напомню, что (*) это и есть ф-ла Тейлора

$\exists\, \xi \in (x_0, \xi_1)$: спр-ва (*) с заменой $n \to n-1$, $f \to \tilde{f}$, $P \to \tilde{P}$ и $x \to \xi_1$:

$$\frac{\tilde{f}(\xi_1) - \tilde{P}_{n-1}(\xi_1)}{(\xi_1 - x_0)^n} = \frac{\tilde{f}^{(n)}(\xi)}{n!} \qquad (2)$$

Всё, что нам осталось теперь сделать, это подставить ф-лу (2) в соотн-ие (1). Осуществляя указанную подстановку, получаем

$$(1): \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{\tilde{f}(\xi_1) - \tilde{P}_{n-1}(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n} \overset{(2)}{=}$$

$$= \frac{\tilde{f}^{(n)}(\xi)}{(n+1)\, n!} = \frac{\tilde{f}^{(n)}(\xi)}{(n+1)!}$$

или

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^n,$$

что и требовалось док-ть (т.е. мы убедились в том, что спр-ва ф-ла Тейлора порядка $n$). $\Delta$

Из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа мгновенно получается ф-ла Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Сформулируем соотв-ее утв-~~ие~~и, которое мы назовём теоремой о формуле Тейлора-Пеано

Теорема (о формуле Тейлора-Пеано)
Пусть $f(x)$:
1) опр-на и $n$ раз диф-ма в $O_\delta(x_0)$
2) $f^{(n)}(x)$ непр-на в т. $x_0$

Тогда для ф-ии $f(x)$ справ-во следующее представление

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{\bar{\bar{o}}(\Delta x^n)}_{\text{остаточный член в форме Пеано}}, \quad x \to x_0$$

Зам Эту формулу наз-ют формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или формулой Тейлора-Пеано. Заметим также, что формула Тейлора-Пеано явл-ся ~~частным случаем~~ асимптотической формулой или как ещё говорят асимптотическим представлением для ф-ии $f(x)$. Подчеркну что под асимптотической формулой мы подразумеваем соотн-ие вида $f(x) =$ выр-ие + остаток, в котором остаток стремится к нулю при $x \to x_0$ $(\Delta x \to 0)$. (Впрочем, асимптотическими наз-ют также такие формулы, в кот-х остаток $\not\to 0$, но зато остаток/выр-ие $\to 0$, т.е. в кот-х остаток мал лишь в относительном смысле)

$\Delta$ Для док-ва этой теоремы достаточно к ф-ии $f(x)$ применить ф-лу Тейлора с остаточным членом в **форме** Лагранжа. Следует только заметить, что в отличие от предыдущей теоремы Тейлора, в которой мы требовали $(n+1)$-кратной диф-ти $f(x)$, в настоящей **т-ме** мы ограничились требованием $n$-кратной диф-ти ~~этой~~ данной ф-ии. В связи с этим мы можем утв-ать, что для $f(x)$ справедлива формула Тейлора лишь $(n+1)$-го порядка

$$f(x) = P_{n-1}(x) + R_n(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\Delta x^n,$$

$$\xi = \xi(x) \in (x_0, x)$$

Как мы уже убедились ранее, и у того, что $\xi(x) \in (x_0, x) \Rightarrow \xi(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{представимо в виде}}}{=} x_0 + \Theta(\Delta x)\cdot\Delta x$, где $\Theta(\Delta x) \in (0,1)$

Тогда, используя второе условие доказываемой теоремы (о непрер-сти $n$-ой произв-ой ф-ии $f$ в т. $x_0$), получаем

т.к. $f^{(n)}(x)$ непр-на в т. $x_0$

$$\lim_{x\to x_0} f^{(n)}(\xi(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} f^{(n)}(x_0 + \Theta(\Delta x)\Delta x) \stackrel{\downarrow}{=}$$

$$= f^{(n)}(x_0 + \lim_{\Delta x\to 0}\Theta(\Delta x)\cdot\Delta x) = f^{(n)}(x_0)$$

Но последнее, в свою очередь, означает, что

$$\underbrace{f^{(n)}(x_0 + \Theta\Delta x)}_{f^{(n)}(\xi)=} = f^{(n)}(x_0) + \alpha(\Delta x),$$ где $\alpha$

$\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ (т.е. б.м. в т. $\Delta x = 0$)

Подставляя это соотношение в написанную выше ф-лу Тейлора для ф-ии $f(x)$, имеем

(ибо теперь произв-я $f^{(n)}$ берётся уже не в точке $\xi$, а в точке $x_0$)

$$f(x) = \underbrace{P_{n-1}(x) + \overbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n}^{n\text{-ое слагаемое мн-на Тейлора}}}_{P_n(x)} + \frac{1}{n!}\underbrace{\underset{\bar{\bar{o}}(1)}{\alpha(\Delta x)}\Delta x^{n+1}}_{\bar{\bar{o}}(\Delta x^{n+1})} =$$

$$= P_n(x) + \bar{\bar{o}}(\Delta x^{n+1}) \longleftarrow \text{ч.т.д.}$$

$\not\Delta$

Зам 1 Ф-лу Тейлора-Пеано можно док-ть и при более слабых требованиях на ф-ию $f(x)$, а именно,

если $\exists f^{(n)}(x_0) \Rightarrow f(x) = P_n(x) + \overline{\overline{o}}(\Delta x^{n+1})$

~~При~~ В частности, при $n=1$ получаем, что

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \overline{\overline{o}}(\Delta x)$$

Т.о., при $n=1$ ~~получаем, что~~ ф-ла Пеано переходит в усл-ие диф-ти ф-ии в т. $x_0$:

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \overline{\overline{o}}(\Delta x)$$

~~Зам 2~~ | Может возникнуть вопрос: а зачем нужна ф-ла Тейлора с остаточным членом в форме Пеано — ведь формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа давала точность $\underline{\underline{O}}(\Delta x^{n+1})$, т.е. более высокую, нежели $\overline{\overline{o}}(\Delta x^n)$ (вспомните рассуждения об $\underline{\underline{O}}$-их и $\overline{\overline{o}}$-ых в начале этого §-фа)? ~~Но~~ Дело в том, что (как уже подчёркивалось в процессе док-ва т-мы о ф-ле Тейлора-Пеано) в теореме о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа требовалась $(n+1)$-ая диф-сть ф-ии $f(x)$ (да ещё и огр-сть её $(n+1)$-ой произв-ой, чтобы остаток составлял $\underline{\underline{O}}(\Delta x^{n+1})$):

$$\begin{matrix}\exists\text{-ие и огр-ть } f^{(n+1)}(x) \\ \text{в } O_\delta(x_0)\end{matrix} \Rightarrow f(x) = P_n(x) + \underline{\underline{O}}(\Delta x^{n+1})$$

В данном же случае (т.е. в теореме о формуле Тейлора-Пеано) мы требуем лишь n-кратной диф-ти ф-ии $f$. Но тогда при использовании остаточного члена в форме Лагранжа мы вынуждены ограничиться ~~собой~~ формулой Тейлора (n-1)-го порядка:

$$f(x) = P_{n-1}(x) + R_n(x),$$

откуда, при условии, что $f^{(n)}(x)$ не только существует, но и огр-на в $O_\delta(x_0)$, получаем:

$$\underset{\text{в } O_\delta(x_0)}{\exists\text{-ие и огр-ть } f^{(n)}(x)} \Rightarrow f(x) = P_{n-1}(x) + \underline{\underline{O}}(\Delta x^n)$$

А эта точность безусловно ниже той, которая фигурирует в формуле Тейлора-Пеано

~~Но~~ Тогда возникает обратный вопрос: а зачем нужен остаточный член в форме Лагранжа, когда остаточный член в форме Пеано для n-кратно диф-ой ф-ии обеспечивает более высокую точность? Есть две причины. Во-первых, как мы отмечали, остаточный член с $\bar{\bar{o}}(\Delta x^n)$ не пригоден для точных численных оценок (в отличие от остаточного члена в форме Лагранжа). А во-вторых, остаточный член

в форме Пеано ~~имеет~~ даёт более высокий | 22.10
порядок точности лишь в случае ф-ии, имеющей конечное число произв-ых

Напр, если $f(x)$ имеет ровно 10 произв-ых в $O_\delta(x_0)$ (т.е. 11-ой, а значит и всех более старших произв-ых у неё не сущ-ет):

$$\forall x \in O_\delta(x_0) \Rightarrow \exists\, f^{(10)}(x) + \text{огран-ть в } O_\delta(x_0)$$

$$\exists x \in O_\delta(x_0): \ \nexists\, f^{(11)}(x)$$

(потребуем также, чтобы 10-ая произв-ая была огр-на в $O_\delta(x_0)$)

Тогда на основании ф-лы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа можем записать, что

$$f(x) = P_9(x) + \underline{\underline{O}}(\Delta x^{10}) \leftarrow \text{Лагранж},$$

а на основании ф-лы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, что

$$f(x) = P_{10}(x) + \overline{\overline{o}}(\Delta x^{10}) \leftarrow \text{Пеано}$$

Т.о., в данном случае ф-ла Пеано имеет преимущество (которое, правда, как было подчёркнуто, носит лишь качественный характер) – ведь $\overline{\overline{o}}$-ое требует более высокой скорости стремления к нулю, чем $\underline{\underline{O}}$-ое (в то же время надо отметить, что с теоретической точки зрения это качественное отличие иногда играет существенную роль)

Но дело в том, что мы как правило будем работать с $\infty$-но диф-ми ф-ми:

$f(x): \forall k \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in O_\delta(x_0) \Rightarrow \exists f^{(k)}(x) +$ огр-ть в $O_\delta(x_0)$ (огр-сть $f^{(k)}(x)$ в случае $\infty$-ной диф-емости получается автоматически, по крайней мере при уменьшенном $\delta$). А для таких ф-ий в независимости от формы остаточного члена применима формула Тейлора произвольного порядка. Допустим, напр, что мы захотели написать ф-лу Тейлора 100-го порядка для $\infty$-но диф-ой ф-ии $f(x)$ — спрашивается, какую форму остаточного члена нам предпочесть: остаточный член в форме Пеано или остаточный член в форме Лагранжа? Разум-ся, тогда уж в форме Лагранжа! Ведь оценка $\underline{\underline{O}}(\Delta x^{101})$ требует от остатка более высокой скорости стремления к нулю, чем $\bar{\bar{o}}(\Delta x^{100})$:

$$f(x) = P_{100}(x) + \underline{\underline{O}}(\Delta x^{101}) \leftarrow \text{Лагранж}$$

$$f(x) = P_{100}(x) + \bar{\bar{o}}(\Delta x^{100}) \leftarrow \text{Пеано}$$

Т.о., если фиксирован порядок формулы Тейлора (напр, $n=100$), а не степень гладкости ф-ии $f$ (напр, сущ-ие 10-ти производных, как в разобранном выше примере), то лучше использовать форму Лагранжа. На практике подмеченная закономерность приводит к тому, что в случае $\infty$-но диф-ых ф-ий ф-лу Тейлора всегда используют с остаточным членом в форме Лагранжа

Примеры

1) $y=\sin x$ — разложить по формуле Маклорена произвольного порядка

Маклорен $\Rightarrow x_0=0$ (т.е. разложение ведётся по степеням $x$)

$$\sin^{(n)} \underset{\substack{\uparrow \\ x_0=0}}{0} = \sin\left(0+\frac{\pi n}{2}\right) = \sin\frac{\pi n}{2}$$

$$\sin^{(2k)} 0 = \sin \pi k = 0$$

$$\sin^{(2k+1)} 0 = \sin\left(\pi k + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \pi k = (-1)^k$$

$n=0=2k$ при $k=0$

$n=1=2k+1$ при $k=0$

$n=2=2k$ при $k=1$

$n=3=2k+1$ при $k=1$

—— " ——

$$\sin x = \underbrace{\sin^{(0)} 0}_{\substack{0 \\ k=0}} + \underbrace{\frac{\sin' 0}{1!}}_{\substack{1 \\ k=0}} x + \underbrace{\frac{\sin'' 0}{2!}}_{\substack{0 \\ k=1}} x^2 + \underbrace{\frac{\sin^{(3)} 0}{3!}}_{\substack{-1 \\ k=1}} x^3 + \dots +$$

$$+\cancel{\frac{\sin^{(2k)}0}{(2k)!}}_{\,0}\,x^{2k}+\frac{\sin^{(2k+1)}0}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\frac{\sin^{(2k+3)}}{(2k+2)!}x^{2k+2}+$$

$$\underset{k}{\uparrow}\qquad\qquad\underset{k}{\uparrow}\qquad\qquad\underset{k+1}{\uparrow}$$

$$+R_{2k+3}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\underline{\underline{O}}(x^{2k+3})$$

Задание. Получить (и запомнить!) разложение по формуле Маклорена (произв-го порядка) следующих элементарных ф-ий:

$e^x$, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$

(для $e^x$, $\sin x$ – повторить). Разложения по формуле Маклорена для этих 5 ф-ий наз-ют просто – основными **разложениями**

② $y=x^{x-1}$ ← разложить по формуле Тейлора с центром в точке $x_0=1$ с точностью до $\underline{\underline{O}}(\Delta x^5)$ и, используя это разложение, найти $y^{IV}(1)$

Если решать эту з-чу "в лоб", то нам придётся искать все произв-ые $y(x)$ до 4-го порядка, а это очень громоздко – есть более простой и короткий путь – можно воспользоваться основными разложениями

$x=x_0+\Delta x=1+\Delta x$

$\Rightarrow y=(1+\Delta x)^{\Delta x}=e^{\Delta x\ln(1+\Delta x)}$ ← П.о., разложить ф-цию $y=f(x)$ по формуле Тейлора с центром в т-ке $x=x_0$ — это всё равно, что разложить ф-цию $y=f(x_0+\Delta x)\equiv g(\Delta x)$ по формуле Тейлора с центром в точке $\Delta x=0$ (т.е. по формуле Маклорена)



Для $\ln(1+\Delta x)$ справ-во след-ее разложение (напомню, что получение этого разложения — часть домашнего задания — см. выше)

$$\ln(1+\Delta x)=\Delta x-\frac{1}{2}\Delta x^2+\frac{1}{3}\Delta x^3-\dots+(-1)^{k+1}\Delta x^k+\underline{\underline{O}}(\Delta x^{k+1})$$

$$\Rightarrow y=e^{\underbrace{\Delta x^2-\frac{1}{2}\Delta x^3+\frac{1}{3}\Delta x^4+\underline{\underline{O}}(\Delta x^5)}_{t}}\equiv e^t,\text{ где } t\to 0 \text{ при } \Delta x\to 0$$

Теперь воспользуемся разложением для ф-ции $e^t$ (напомню, что мы уже раскладывали эту ф-цию раньше, кроме того, вы должны будете ещё раз разложить её по формуле Маклорена в рамках д/з)

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\underline{\underline{O}}(t^3)$$

$$t=\overbrace{\Delta x^2-\frac{1}{2}\Delta x^3+\frac{1}{3}\Delta x^4+\underline{\underline{O}}(\Delta x^5)}=\overbrace{\Delta x^2+\underline{\underline{O}}(\Delta x^3)}=\overbrace{\underline{\underline{O}}(\Delta x^2)}$$

Подставляя в это разложение на место $t$ его выражение через $\Delta x$ (при этом чем выше степень $t$, тем более грубым разложением

$t(\Delta x)$ (по степеням $\Delta x$) мы можем ~~ограничиться~~ ограничиваться (с целью сокращения выкладок)), получаем

$$y = x^{x-1} = 1 + \Delta x^2 - \frac{1}{2}\Delta x^3 + \frac{1}{3}\Delta x^4 + \underline{\underline{O}}(\Delta x^5) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\Delta x^2 + \underline{\underline{O}}(\Delta x^3)\right) + \underline{\underline{O}}\left(\underline{\underline{O}}(\Delta x^2)^3\right) =$$
$$= 1 + 1\cdot\Delta x^2 - \frac{1}{2}\Delta x^3 + \frac{5}{6}\Delta x^4 + \underline{\underline{O}}(\Delta x^5) + \Delta x^2\,\underline{\underline{O}}(\Delta x^3) +$$
$$+ \underline{\underline{O}}(\Delta x^3)\cdot\underline{\underline{O}}(\Delta x^3) + \underline{\underline{O}}(\Delta x^6) =$$
$$= \underset{\substack{\uparrow\\ y(1)}}{1} + \underset{\substack{\uparrow\\ \frac{y''(1)}{2!}}}{1}\cdot\Delta x^2 - \underset{\substack{\uparrow\\ \frac{y'''(1)}{3!}}}{\frac{1}{2}}\Delta x^3 + \underset{\substack{\uparrow\\ \frac{y^{IV}(1)}{4!}}}{\frac{5}{6}}\Delta x^4 + \underline{\underline{O}}(\Delta x^5) + \cancel{\underline{\underline{O}}(\Delta x^6)}$$

$$y'(1) = 0$$

Тем самым мы нашли $y^{IV}(1)$:

$$y^{IV}(1) = 4!\,\frac{5}{6} = \cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 4\cdot\frac{5}{\cancel{6}} = 20$$

Дополнительно:

⌈Решение последней задачи порождает следующий закономерный **вопрос**: а вдруг, раскладывая разными способами по формуле Тейлора (с центром в точке $x_0$) ф-цию $y(x)$, мы будем получать разный результат, т.е. различные мног-ны относит-но $\Delta x = x - x_0$ (в частности, это означало бы, что $\frac{y^{IV}(1)}{4!}$ – коэф-ент при $\Delta x^4$ стандартного мног-на Тейлора, мог бы $\neq$ коэф-ту при $\Delta x^4$ мног-на, полученного нами в процессе решения). Оказ-ся, однако, что это не так

Утв Если для ф-ции $f(x)$ спр-во асимптотическое представление вида

$$f(x) = A_0 + A_1 \Delta x + A_2 \Delta x^2 + \ldots + A_n \Delta x^n + \bar{o}(\Delta x^n),$$

$$\Delta x = x - x_0 \to 0,$$

то коэф-ты $A_i$ этого ~~разложения~~ представления определ-ся единственным образом

Я не буду останавл-ся на док-ве этого утв-я (см., напр, "Матан" Зорича) — ограничусь лишь двумя замечаниями

Зам 1 Поскольку $\underline{\underline{O}}(\Delta x^{n+1}) = \bar{o}(\Delta x^n)$ (но не наоборот — мы это подробно обсуждали), то, разум-ся, утв-ие остаётся в силе и в случае, когда остаточный член $= \underline{\underline{O}}(\Delta x^{n+1})$

Зам 2 Ввиду док-ой выше теоремы о ф-ле Тейлора-Пеано (и зам-ия к ней), в случае $n$ раз диф-ой в т-ке $x_0$ ф-ции $f(x)$ коэф-ты $A_i$ = коэф-ам мн-на Тейлора $P_n(x)$ этой ф-ции:

$$A_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}$$

③ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = 1^\infty = ?$

Ф-ла Тейлора находит своё приме- $\boxed{22.17}$
нение и при вычислении нек-ых пределов -
- как более удачная альтернатива многократному "лопитированию" (применению правила Лапиталя)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \exp\left[\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right] =$$

$$= \exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right]$$

$$\frac{\sin x}{x} = \left[x - \frac{x^3}{3!} + \underline{\underline{O}}(x^5)\right]\cdot\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} = 1 \underbrace{-\frac{x^2}{6} + \underline{\underline{O}}(x^4)}_{t(x)} \equiv 1 + t(x), \text{ где } t(x)\to 0 \text{ при } x\to 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\ln(1+t(x)) = \frac{1}{x^2}(t + \underline{\underline{O}}(t^2)) =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left\{-\frac{x^2}{6} + \underline{\underline{O}}(x^4) + \underbrace{\underline{\underline{O}}\left[\left(-\frac{x^2}{6} + \cancel{\underline{\underline{O}}(x^4)}\right)^2\right]}\right\} =$$

Можно было сразу написать $\underline{\underline{O}}(\underline{\underline{O}}(x^2)^2)$ как в предыдущем примере

$$= -\frac{1}{6} + \underline{\underline{O}}(x^2) \to -\frac{1}{6},\ x\to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

Дополн-но:

(4) Разложить по формуле Маклорена $y = \underbrace{\operatorname{arctg} x}^{f(x)=}$

$$f'(x)=(\operatorname{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots+x^{2n}+\underline{\underline{O}}(x^{2n+2})$$ **22.18**

$$\underset{\operatorname{arctg}x}{\underset{\parallel}{f(x)}}-\underset{\cancel{\operatorname{arctg}0}\to 0}{\underset{\parallel}{f(0)}}\overset{\uparrow}{=}\int_0^x f'(t)\,dt=\int_0^x\left[1-t^2+t^4-\ldots+t^{2n}+\underline{\underline{O}}(t^{2n+2})\right]dt=$$

Ньютон – Лейбниц (здесь мы немного забегаем вперёд, предваряя следующую главу)

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+\overset{(-1)^{n+1}}{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}+\underbrace{\int_0^x\underline{\underline{O}}(t^{2n+2})\,dt}_{\underline{\underline{O}}(x^{2n+3})}$$

Док-во для $\int$-ла от $\underline{\underline{O}}$-го

$\Delta$ Пусть $\psi(x)=\int_0^x\varphi(t)\,dt$ и $\varphi(t)=\underline{\underline{O}}(t^{2n+2})\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow|\varphi(t)|\le\underline{\underline{C}}\,|t^{2n+2}|$ при $t\in O_\delta(0)$

Тогда $\forall x\in O_\delta(0)\Rightarrow|\psi(x)|=\left|\int_0^x\varphi(t)\,dt\right|\le$

$$\le\left|\int_0^x|\underset{t\in(0,x)\subset O_\delta(0)}{\varphi(t)}|\,dt\right|\le\left|\int_0^x\underline{\underline{C}}\,t^{2n+2}\,dt\right|=\underbrace{\frac{\underline{\underline{C}}}{2n+3}}_{\equiv C_1}|x^{2n+3}|=$$

$=C_1x^{2n+3}\Rightarrow\psi(x)=\underline{\underline{O}}(x^{2n+3})$ $\blacktriangle$

Итак, $\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\underline{\underline{O}}(x^{2n+3})$

В качестве самост-го задания можете (исп-уя ан-ый приём) получить ф-лу Маклорена для ф-ии $y=\arcsin x$ (только это существенно более сложная в техническом отношении задача)