Лекция 23

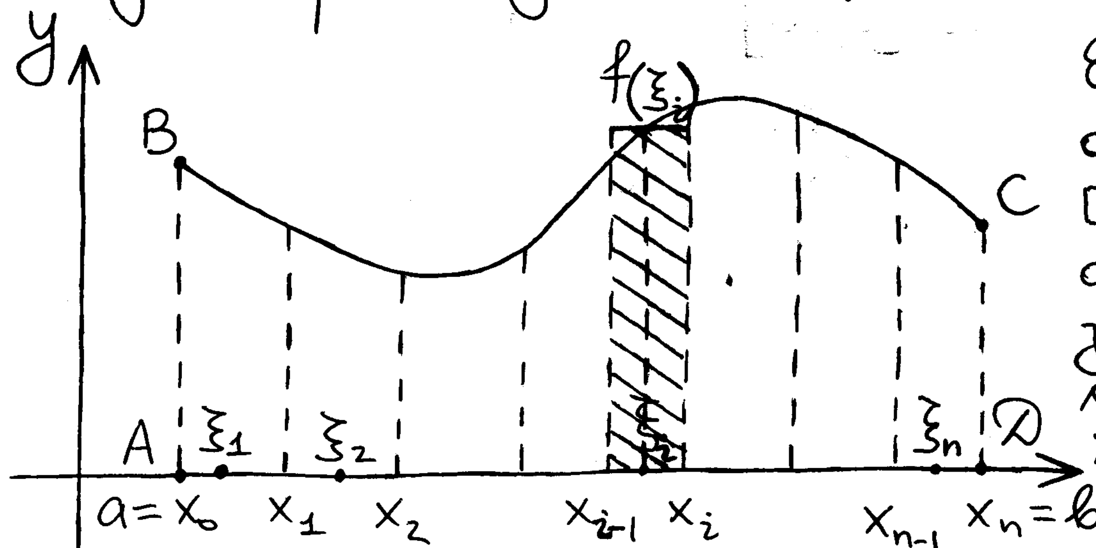
# Глава 8

# Определённый интеграл

## §1 Определение интегрируемости

Напомню, что 5-ая глава была посвящена теории неопред-ных ∫-ов. В настоящей главе мы рассм-им ∫-лы нового вида — опред-ые ∫-лы. По ходу изложения выяснится, как связаны между собой эти интегралы, и в чём отличие между ф-ми, интегрируемыми в смысле сущ-ия опр-го ∫-ла и в смысле сущ-ия первообразной (т.е. сущ-ия неопр-го ∫-ла)

Пусть ф-ия $y = f(x)$: $D_f \supset [a, b]$, где $a < b$




Если $f(x) > 0$, то отр-ки AB, CD и DA и кривая BC образуют так называемую криволинейную трапецию ABCD (AB и CD — основания, отр. AD и кривая BC — "боковые стороны")

Выберем на отр-ке $[a,b]$ произвольным образом т-ки $x_1, \dots, x_{n-1} \equiv x_{1}, x_{n-1}$:

напоминаю про более компактный способ обозначения

$$a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \equiv b$$

Мн-во точек $\{x_1, \dots, x_{n-1}\} \equiv T = T[a,b]$ наз-ся разбиением $T$ отр-ка $[a,b]$

Сами точки $x_i$ (т.е. точки мн-ва $T$) – точки разбиения

$[x_{i-1}, x_i]$ – ~~частичный~~ $i$-ый частичный отрезок (или $i$-ый частичный сегмент). Всего получается $n$ частичных отрезков (занумерованных по правым концам $x_i$), в то время как число разрезов (т.е. точек разбиения) – всего $n-1$. Дело в том, что правый конец последнего частичного отр-ка – точка $x_n$ – не явл-ся точкой разбиения отр-ка $[a,b]$ (вспомните, чтобы распилить бревно, скажем, на 5 частей, надо сделать 4 разреза)

длины частичных отр-ов, вообще говоря, $\neq const$ (т.е. различны при разных $i$)

$\Delta x_i \equiv x_i - x_{i-1}$ – длина $i$-го частичного отр-ка

$\overset{=\Delta(T)}{\Delta} \equiv \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$ – диаметр разбиения (максимальная из длин частичных отрезков)

Теперь на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ возьмём какую-н т. $\xi_i$:

~~$\forall i=\overline{1,n} \mapsto \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$~~

$$\{\xi_1, \dots \xi_n\} \equiv \{\xi_i\} : \forall i=\overline{1,n} \mapsto \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Точки $\xi_i$ – промежуточные точки разбиения $T[a,b]$

Сколько всего существует разбиений отр-ка $[a,b]$? Естественно, $\infty$ много. А сколько всего существует способов выбора промежуточных точек $\xi_i$ для каждого разбиения $T$? Разум-ся, также $\infty$ много

Опр Сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n \equiv I(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_1, \dots \xi_n) \equiv I(x_i, \xi_i)$ наз-ся $\int$-ой суммой ф-ии $f(x)$, отвечающей данному разбиению $T[a,b]$ и данному выбору промежут-ых т-ек $\xi_1, \xi_n$

Впоследствии заменить на $\sigma(x_i, \xi_i)$ с замечанием о том, что иногда обозн-ют через $I(x_i, \xi_i)$

Зам (про обозначения)

$\underset{\text{фикс-но}}{T}$, $\underset{\text{произв-но}}{\xi_i}$: $I(T, \xi_i)$ – произвольная $\int$-ая $\sum$-ма, отвечающая фиксиров-му разб-ию $T$

$\{I(x_i, \xi_i)\}$ – мн-во всех ∫-ых $\Sigma$-м

$\{I(T, \xi_i)\}$ – мн-во всех ∫-ых $\Sigma$-м, отвечающих данному разбиению T

Геометр-ий смысл ∫-ой суммы

$I(x_i, \xi_i) = S_1 + \dots + S_n$,

где $S_i$ – площадь $i$-го прямоуг-ка, т.е. прям-ка шириной $\Delta x_i$ и высотой $f(\xi_i)$ (см. рисунок). При этом, если $f(\xi_i) < 0$, то мы считаем, что его площадь имеет отр-ый знак: $S_i < 0$

Введём понятие предела ∫-ных сумм

Опр Число I наз-ся пределом ∫ых сумм $I(x_i, \xi_i)$ при $\Delta \to 0$, если

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall T[a,b] : \Delta(T) < \delta$ и ~~любого вы~~

$\forall$ выбора $\{\xi_i\} \Rightarrow |I(x_i, \xi_i) - I| < \varepsilon$

промежут-ых точек

нас не должно смущать, что дельта большое меньше дельта малого (это не ошибка)

Обозн $I = \lim\limits_{\Delta \to 0} I(x_i, \xi_i)$

Предел ∫-ых сумм (разум-ся, в случае, если он сущ-ет) и принято называть определённым ∫-ом

Опр Если сущ-ет $\lim\limits_{\Delta \to 0} I(x_i, \xi_i) \equiv I$, то ф-ия

$f(x)$ наз-ся интегрируемой (по Риману) на $[a,b]$, а число $I$ наз-ся определ-ным инт-ом от ф-ии $f(x)$ по отр-ку $[a,b]$

Обозн $I = \int_a^b f(x)dx$ — читается: инт-ал от $a$ до $b$ от $f$ от $x$ $dx$

Дополн-но:

Зам ~~Понятие~~ Опр-ие предела инт-ых сумм имеет внешнее сходство с опр-ем предела ф-ии по Коши. Оказ-ся, это сходство не только внешнее — оба предела явл-ся частными случаями более общего предела — предела по фильтру. Я не буду вводить опр-ие предела по фильтру — это понятие весьма нетривиально, да и к тому же мы не ставим перед собой цель достичь такой высокой степени общности в опр-ии предела (о пределе по фильтру см., напр, конец 3-го тома 3-х томника Л. Д. Кудрявцева „Курс матем-го анализа")

Геометр-ий смысл опр-го инт-ла

Разбиение $T$ отр-ка $[a,b]$ задаёт и разбиение криволинейной трапеции $ABCD$ на $n$ частичных трапеций (см. рис.)

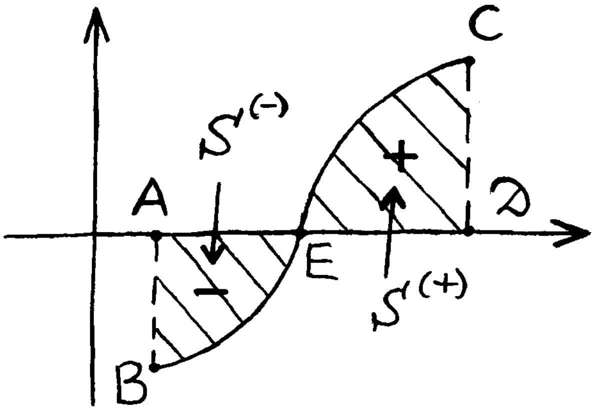
При стремлении к нулю диаметра разбиения (или, как ещё говорят — при уменьшении разбиения), ширина частичных криволинейных трапеций также → 0. Отметим, что при малой ширине частичные криволинейные трапеции становятся малоотличимыми от соотв-их частичных прямоугольников. Поэтому естест-но считать, что площади таких трапеций близки к площадям отвечающих им прямоуг-ов, а $\int$-ая сумма, т.е. сумма площадей всех частичных прямоуг-в, — близка к площади всей криволин-ой трапеции ABCD (замечу, что точного опр-ия площади криволин-ой трапеции у нас пока нет). Причём чем меньше диаметр разбиения отр-ка $[a, b]$, тем, в соответствии с интуитивными представлениями о площадях плоских фигур, меньшим должно быть отличие суммы всех частичных прямоуг-ов от площади крив-ой трапеции ABCD. Опираясь на эти интуитивные геометр-ие представления, приходим к след-му результату

$$\lim_{\Delta \to 0} I(x_i, \xi_i) \equiv \int_a^b f(x)\,dx = S_{ABCD} \leftarrow \text{криволин-ой трапеции}$$

Последнее соотн-ие вполне можно рассм-ать как полноценное опр-ие площади фигуры специального ~~вида~~ — криволинейной трапеции ABCD, т.к. это соотн-ие не только интуитивно очевидно, но и удовлетворяет всем требованиям, которым в принципе должно удовл-ять опр-ие площади плоской фигуры. Я не буду сейчас подробнее останавливаться на этом вопросе, а замечу лишь, что на самом деле с понятием площади криволин-ой трапеции обычно поступают несколько иначе. Вводят опр-ие площади произвольной плоской фигуры, а криволин-ую трапецию рассм-ют как её частный случай. И далее убеждаются в том, что полученное на основе этого общего опр-ия значение площади криволин-ой трапеции ABCD совпадает с опред-ым $\int$-ом от ф-ии $f(x)$

Ко всему сказанному выше следует только сделать ~~од~~ одно существ-ное уточнение

Если $f(x)$ имеет разные знаки на отр-ке AB, то $\int f(x)dx$ складывается из площадей ~~трапе~~




криволин-ых трапеций, лежащих над и под осью абсцисс (при этом площади трапеций из нижней полуплоскости берутся со знаком минус). Напр, для случая, изображенного на рисунке

$$\int_a^b f(x)dx = \underset{<0}{S^{(-)}} + \underset{>0}{S^{(+)}} \equiv S \leftarrow \text{в обобщённом смысле}$$

(заметим, что так опр-ая $S$ вполне может равняться нулю)

## Физический смысл опр-го $\int$-ла

1) $L = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$, где $v(t) \equiv |\vec{v}(t)|$

– путь (не путать с перемещением), пройденный за отрезок времени $[t_1, t_2]$ точкой, движущейся со скоростью $\vec{v}(t)$ (причём движение может быть криволинейным)

2) $A = \int_a^b f(x)dx$ – работа силы $f(x)$ (направ- ~~прило~~ ленной по ~~вдоль~~ оси $x$) при перемещении материальной точки вдоль оси $x$ из положения $x=a$ в положение $x=b$

Поставим вопрос: а для каких ф-ий вообще существует опр-ый $\int$-ал? Т.е. можно ли указать на какие-то уже известные нам свойства ф-ии $f(x)$, наличие которых являлось бы необх-ым или дост-ым усл-ем её $\int$-руемости (в смысле сущ-ия опр-го $\int$-ла)? Оказывается, можно. К некоторым из таких св-в мы и сейчас (или в ближайшее время) и перейдём

Теорема

$$\int_a^b\text{-мость } f(x) \Rightarrow \text{огран-ть } f(x) \text{ на } [a,b] \quad (\mathrm{I})$$

$$f(x) \text{ не } \int_a^b\text{-ема} \Leftarrow \text{неогр-ть } f(x) \text{ на } [a,b] \quad (\mathrm{II})$$

Подчеркну, что (I) $\Leftrightarrow$ (II) (но мы формально докажем утв-ие II)

Зам Т.о. огр-ть необходима для $\int$-ти по Риману. В связи с этим в дальнейшем мы будем рассм-ать только огран-ые ф-ии

$\Delta$ Прежде всего заметим, что

$$\text{сущ-ие } \int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow \text{сущ-ие } \lim_{\Delta\to 0} \underbrace{I(x_i,\xi_i)}_{\int\text{-ые суммы для } f(x)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ огр-ть $I(x_i, \xi_i)$ при дост-но малых $\Delta$ $(*)$

Предположим теперь, что $f(x)$ неограничена на $[a,b]$ и убедимся в неогр-ти мн-ва $\int$-ых сумм $\{I(T, \xi_i)\}$, отвечающих любому разбиению $T$ отр-ка $[a,b]$ (с любым, ~~сколь угодно мало~~

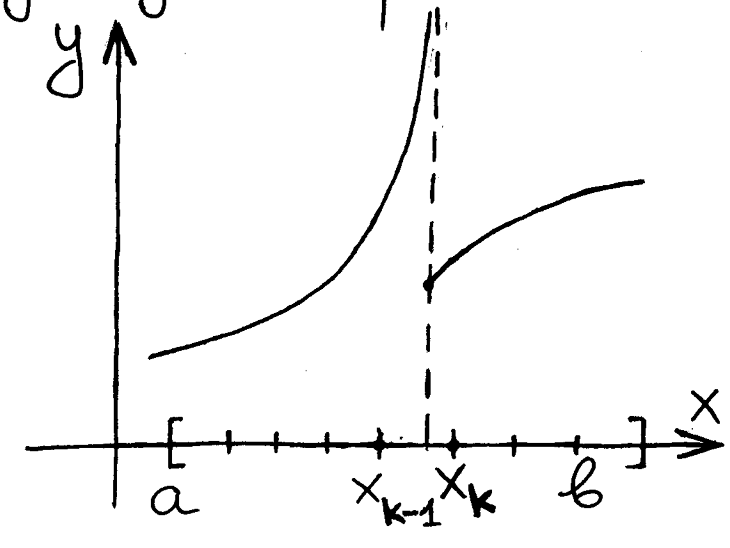
~~покажем, что $\forall$ $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow$ неогр-ть мн-ва $\{I(T(\Delta), \xi_i)\}$,~~

~~где $T(\Delta)$ — любое разбиение~~

в том числе сколь угодно малым, диаметром $\Delta$) — это будет противоречить $(*)$ и тем самым доказывать теорему

Рассм-м $\forall$ разбиение $T[a,b]$ (с каким угодно диаметром $\Delta$)




$f(x)$ неогр на $[a,b] \Rightarrow$ $\Rightarrow$ неогр-на хотя бы на одном из частичных сегментов (т.к. если бы $f(x)$ была огр-на на каждом частичном сегменте, то она была бы огр-на и на всём отр-ке $[a,b]$):

$\exists k \in \overline{1,n}$ : $f(x)$ неогр на $[x_{k-1}, x_k]$:

$\forall A \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x^* \in [x_{k-1}, x_k] : |f(x^*)| > A$, ~~т.е.~~

~~$\exists x^*$~~ т.е. $\exists x^*(A)$:

$$\forall A \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(x^*(A))| > A \qquad (1)$$

Построим $\int$-ую сумму $I(T, \xi_i)$, отвечающую разбиению $T$ (речь пока идёт об абстрактной $\int$-ой сумме для данного $T$):

$$I(T, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \equiv$$

$$\equiv f(\xi_k) \Delta x_k + \Delta I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |I(T, \xi_i)| = |f(\xi_k) \Delta x_k - (-\Delta I)| \geq$$

$$\geq |f(\xi_k) \Delta x_k| - |-\Delta I| = |f(\xi_k)| \Delta x_k - |\Delta I| \qquad (2)$$

Зафиксируем теперь все $\xi_i$ (произвольным образом) кроме $\xi_k$ и покажем, что за счёт выбора $\xi_k$ величину $I$ можно сделать сколь угодно большой:

$\forall M > 0 \Rightarrow \exists \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] : |I(T, \xi_i)| > M$,

т.е., что $\exists \xi_k(M)$:

считать $M > 0$ удобнее с технической т-ки зрения, да и по существу дост-но огран-ся полож-ми $M$

$$\forall M \in \mathbb{R} \Rightarrow |I(T, \xi_i)| > M \qquad (3)$$

Положим $\xi_k(M) \equiv x^*\left(\frac{M+|\Delta I|}{\Delta x_k}\right)$. Тогда

$$\forall M>0 \Rightarrow |I(T,\xi_i)| \underset{(2)\ \text{с}\ \xi_k = x^*}{\geq} \left|f\left(x^*\left(\frac{M+|\Delta I|}{\Delta x_k}\right)\right)\right|\Delta x_k - |\Delta I| \overset{(1)\ \text{с}\ A=\frac{M+|\Delta I|}{\Delta x_k}}{>}$$

$$\overset{(1)}{>} \overbrace{\frac{M+|\Delta I|}{\Delta x_k}}^{>0}\Delta x_k - |\Delta I| = M \leftarrow$$ а это и есть утв-ие (3)

Т.о., мы убедились, что при $\forall$ фиксированном разбиении $T$ найдётся такой способ выбора точек $\xi_i$, что $|I(T,\xi_i)| >$ ~~M~~ любого наперёд заданного числа (иными словами, мн-во $\int$-ых сумм ~~для~~ $\{I(T,\xi_i)\}$ явл-ся неогран-ым). Но как уже было отмечено, это и означает, что ф-ия $f$ не интегр-ма на отр-ке $[a,b]$ (поскольку её интегр-ные суммы заведомо не имеют предела при $\Delta \to 0$ $\triangle$

Зам-ие

Огр-сть $f(x)$ на $[a,b]$ $\not\Rightarrow$ $\int\limits_a^b$-мость $f(x)$

Контрпример

Рассм-м ф-ию Дирихле

$$D(x) \equiv \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

~~Рассм-м~~ Поставим вопрос о сущ-ии $\int_a^b D(x)dx$, где a и b – любые веществ-ые$^a$ числа: $a<b$

Рассм-м два предела $\int$-ых сумм $I(x_i,\xi_i)$ (при $\Delta\to 0$), отвечающих двум различным способам выбора промежуточных точек $\xi_i$ (такие пределы наз-ют частичными)

по умолчанию — дополн-ое требование

1) Пусть сперва $\forall T[a,b] \Rightarrow$ все $\xi_i \in [x_{i-1},x_i] \cap \mathbb{Q}$ – очевидно, что такой выбор для любого разбиения (в том числе со сколь угодно малым диаметром $\Delta$) заведомо возможен)

$$\Rightarrow I(x_i,\xi_i\in\mathbb{Q}) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{D(\xi_i)}_{1}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = b-a = const$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\Delta\to 0\\ \xi_i\in\mathbb{Q}}} I(x_i,\xi_i) = b-a$$

2) Пусть теперь $\forall T[a,b] \Rightarrow$ все $\xi_i \in [x_{i-1},x_i] \cap \mathbb{I}$ – и такой выбор заведомо возможен

$$I(x_i,\xi_i\in\mathbb{I}) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{D(\xi_i)}_{0}\Delta x_i = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\Delta\to 0\\ \xi_i\in\mathbb{I}}} I(x_i,\xi_i) = 0$$

Поскольку $\lim\limits_{\Delta\to 0} I(x_i,\xi_i)$ должен равняться одному и тому же числу вне зависимости от способа выбора промежуточных точек $\xi_i$, то этого предела не существ-ет (иначе он должен равняться и тому предельному значению $b-a \neq 0$, которое получается в случае когда мы все $\xi_i$ выбираем $\in$-щими мн-ву $\mathbb{Q}$ рацион-х чисел, и пред-ому зн-ию нуль, получающемуся в случае иррацион-ых $\xi_i$):

$$b-a \neq 0 \Rightarrow \lim_{\Delta \to 0} I(x_i, \xi_i) = \emptyset$$

Но это, в свою очередь, означает, что

$$\int_a^b D(x)dx = \emptyset \text{ на } \forall [a,b] : a<b$$

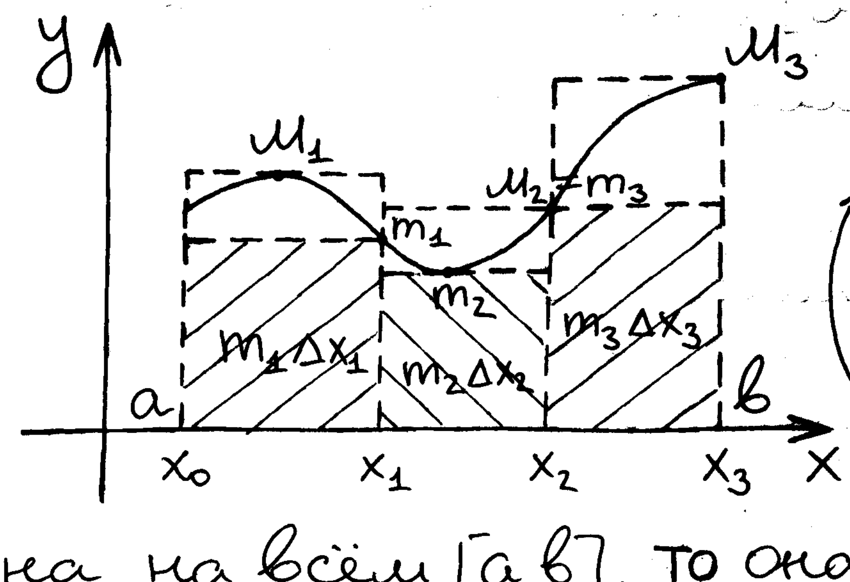
Итак, на примере ф-ии Дирихле мы убедились, что огран-ть ф-ии ещё не влечёт за собой сущ-ие $\int$-ла. Наша ближайшая цель — док-ть, что уже из непр-сти ф-ии вытекает сущ-ие опр-го $\int$-ла. Только следует сразу заметить, что непр-сть явл-ся всего лишь достаточным условием $\int$-сти, т.е. ф-ия вполне может быть $\int$-ма по Риману и не будучи непрерывной (в частности она может быть ~~всего~~ кусочно-непрер-ой)

Чтобы док-ть $\int$-мость непр-ой ф-ии и ряд других утв-ий, нам понадобится теория сумм Дарбу

## §2 Суммы Дарбу

Пусть $f(x): D_f \supset [a,b]$ и пусть $f(x)$ ограничена на $[a,b]$ (напомню, что мы уже договорились рассм-ать только огран-ые ф-ии, т.к. опр-го $\int$-ла от неогр-ой ф-ии заведомо не сущ-ет)

Рассм-м произвольное разбиение $T$ отр-ка $[a,b]$




Введём обозначения

$$\left.\begin{aligned} M_i &\equiv \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \\ m_i &\equiv \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \end{aligned}\right\} \forall i=\overline{1,n}$$

Поскольку $f(x)$ огр-на на всём $[a,b]$, то она огр-на и на каждом из частичных сегментов, а $\Rightarrow$ но данные sup-мы и inf-мы действит-но сущ-ют. Но

в то же время ф-ия $f$ не предполага-
ется непрер-ой, поэтому эти sup-мы и inf-мы
не обязаны достигаться, т.е. не обязаны быть
соотв-но max-ами и min-ами $f(x)$ на частич-
ных сегментах $[x_{i-1}, x_i]$

$$\underline{\underline{S}} = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \equiv \underline{\underline{S}}(x_1, \dots, x_{n-1}) \equiv S(x_i)$$

$$\overline{\overline{S}} \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \equiv \overline{\overline{S}}(x_1, \dots, x_{n-1}) \equiv \overline{\overline{S}}(x_i)$$

Опр $\underline{\underline{S}}$ и $\overline{\overline{S}}$ наз-ют соотв-но верхней и
нижней суммами Дарбу ф-ии $f(x)$ для
данного разбиения $T$ отр-ка $[a, b]$

Зам Грани $m_i$ и $M_i$ (а вместе с ними и
суммы Дарбу $\overline{\overline{S}}$ и $\underline{\underline{S}}$) зависят от выбора то-
чек разбиения $T[a, b]$ (т.е. от выбора т-к $x_i$)
и совершенно не зависят от выбора проме-
жуточных точек $\xi_i$

Геометрический смысл сумм Дарбу

$\overline{\overline{S}}$ - площадь вписанной в криволин-ую тра-
пецию ступенчатой фигуры (см. рис.)

$\underline{\underline{S}}$ - площадь ступенчатой фигуры, описан-
ной около этой трапеции