Лекция 24

Св-ва сумм Дарбу

I) (1-ая группа св-в)

Т.к. $\forall \xi \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow m_i \le f(\xi_i) \le M_i$, то

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i}_{\overline{\overline{S}}(x_i)} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}_{I(x_i, \xi_i)} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i}_{\underline{\underline{S}}(x_i)}$$

$$\overline{\overline{S}}(x_i) \le I(x_i, \xi_i) \le \underline{\underline{S}}(x_i)$$

Итак, справ-во

Утв I.1 Для данного $T[a,b] = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ и

$$\forall \{\xi_i\} \Rightarrow \overline{\overline{S}}(x_i) \le I(x_i, \xi_i) \le \underline{\underline{S}}(x_i)$$

$$\overline{\overline{S}}(T) \le I(T, \xi_i) \le \underline{\underline{S}}(T) \qquad (I.1)$$

Иначе говоря, любая $\int$-ая сумма данного разбиения T заключена между нижней и верхней суммами этого разбиения и, т.о., $\overline{\overline{S}}$ – одна из нижних, а $\underline{\underline{S}}$ – одна из верхних граней мн-ва ~~$\int$-ых~~ $\{I(T, \xi_i)\}$ $\int$-ых сумм, отвечающих ~~данно~~ разбиению T:

Т.о., $\overline{\overline{S}}$, $\underline{\underline{S}}$ – нижняя и верхняя грани $\{I(T, \xi_i)\}$

Докажем, что $\overline{\overline{S}}$ и $\underline{\underline{S}}$ не просто грани, а точные грани этого мн-ва

Утв I.2 $\overline{\overline{S}} = \inf\limits_{\xi_i} \{I(T,\xi_i)\}$ (I.2)

$\underline{\underline{S}} = \sup\limits_{\xi_i} \{I(T,\xi_i)\}$

фиксир-но произв-но

Δ Убедимся в этом для sup-ма (для inf-ма док-во полностью ан-но)

Надо показать, что $\forall T[a,b]$ и $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \{\xi_i\}: I(T,\xi_i) > \underline{\underline{S}}(T) - \varepsilon$,

т.е., что уменьшена верхняя грань $\underline{\underline{S}}(T)$ (ни на какую сколь угодно малую величину ε) уже быть не может, (т.к. полученное в результате уменьшения число $\underline{\underline{S}}(T)-\varepsilon$ не ~~будет~~ явл-ся верхней гранью). Это и будет означать, что $\underline{\underline{S}}(T)$ — действительно точная верхняя грань мн-ва $\{I(T,\xi_i)\}$

Зафиксируем произвольное разбиение T и произв-ое $\varepsilon > 0$ и построим требуемую интегральную сумму (т.е. выберем нужным образом промежуточные точки ξ_i)

Поскольку $M_i \equiv \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$, то по опр-ию точной верхней грани

$\forall i=\overline{1,n}$ и $\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists x_i^* \in [x_{i-1},x_i]$:

$f(x_i^*) > M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}$

Положим $\xi_i \equiv x_i^*$. Тогда получается, что

$$I(T,\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i)}_{>M_i-\frac{\varepsilon}{b-a}} \Delta x_i > \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i}_{\underline{\underline{S}}(T)} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_i =$$

$$= \underline{\underline{S}}(T) - \frac{\varepsilon}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)} = \underline{\underline{S}}(T) - \varepsilon \quad \text{чтд}$$

Напомню, что $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b-a$ – сумма длин всех частичных отр-в = длине всего отр-ка $[a,b]$

II) (2-я группа св-в)

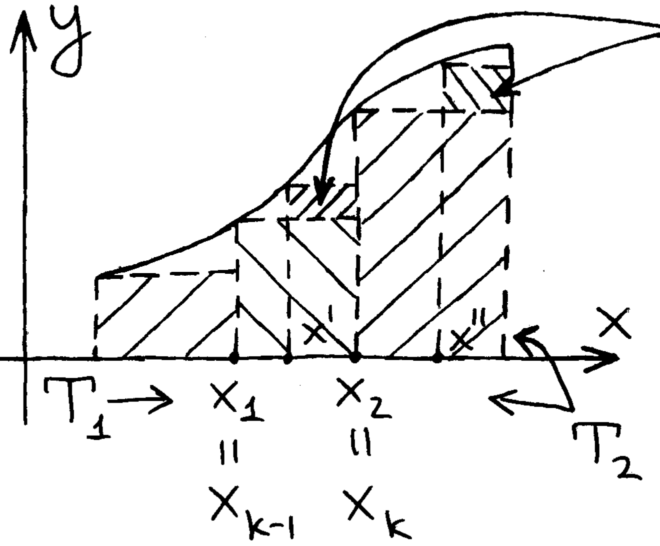
Чтобы различать между собой разбиения отрезка $[a,b]$ будем обозначать их буквой T с различными индексами

Пусть $T_2[a,b]$ получено из $T_1[a,b]$ добавлением нескольких точек: $T_2[a,b] = T_1[a,b]$ + несколько точек, напр,

$T_2[a,b] = \{x_1, x', x_2, x''\}$, а $T_1[a,b] = \{x_1, x_2\}$

$(= \{x_1, x_2, x_3, x_4\})$ ← после добавления новых точек ~~все~~ в T_2 все его точки, конечно, мо- при желании перенумеровать (но мы не будем этого делать)

В таком случае будем говорить, что разбиение T_2 получено измельчением разбиения T_1 и писать: $T_2[a,b] \supset T_1[a,b]$ (или просто: $T_2 \supset T_1$)



Из-за новых точек $\bar{\bar{S}}$ может только возрастать (в крайнем случае оставаться прежней, напр., если $f(x)=\text{const}$). ~~Что сдела~~ Проиллюстрируйте самост-но случай верхних $\int$-ных сумм и с помощью рисунка убедитесь в том, что при измельчении разбиения верхняя сумма $\underline{\underline{S}}$ в отличие от нижней может только убывать)

Обозначим через $\bar{\bar{S}}_1$ и $\underline{\underline{S}}_1$ суммы Дарбу ф-ции $f(x)$ для T_1, а через $\bar{\bar{S}}_2$ и $\underline{\underline{S}}_2$ — для T_2:

$$\bar{\bar{S}}_1 \equiv \bar{\bar{S}}(T_1),\ \underline{\underline{S}}_1 \equiv \underline{\underline{S}}(T_1),$$

$$\bar{\bar{S}}_2 \equiv \bar{\bar{S}}(T_2),\ \underline{\underline{S}}_2 \equiv \underline{\underline{S}}(T_2)$$

и дадим строгое док-во высказанному утв-нию о соотн-иях между нижними и верхними суммами для произвольных T_2 и T_1: $T_2 \supset T_1$

Утв II.1 Пусть $T_2 = T_1 + x^1 + \dots + x^p$. Тогда

$\overline{\overline{S}}_1 \le \overline{\overline{S}}_2$ и $\underline{\underline{S}}_2 \le \underline{\underline{S}}_1$ (II.1)

Зам 1 Эти два нер-ва можно объединить в одну цепочку:

$\overline{\overline{S}}_1 \le \overline{\overline{S}}_2 \underset{\text{I.1}}{\le} \underline{\underline{S}}_2 \le \underline{\underline{S}}_1$

Зам 2 Число точек p, добавляемых к T_1, может быть каким угодно и никак не связано с числом точек в самом разбиении T_1 (напр, в разб-ии T_1 может быть 10 т-к, а добавлено 5, и наоборот)

Δ Док-ем это св-во для нижних ~~f-ых~~ сумм Дарбу (для верхних док-во полностью ан-но)

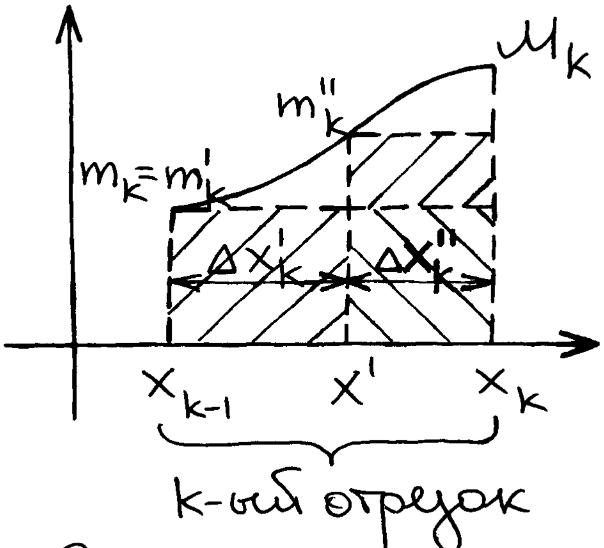
Пусть сперва к разбиению T_1 добавлена всего одна точка $x' \in (x_{k-1}, x_k)$:

в качестве x' в дальнейшем будут посл-но выступать т-ки $x^1, \dots, x^p$

$T_2 = T_1 + x'$, $x' \in (x_{k-1}, x_k)$

(на рисунке в роли (x_{k-1}, x_k) выступает (x_1, x_2))

Обозначим $\Delta x_k' \equiv x' - x_{k-1}$, $\Delta x_k'' \equiv x_k - x'$



$$m'_k \equiv \inf_{[x_{k-1},\, x']} f(x)$$

$$m''_k \equiv \inf_{[x',\, x_k]} f(x)$$

Тогда

$$\Delta x_k = \Delta x'_k + \Delta x''_k \qquad (1)$$

длина отр-ка = сумме длин его частей

$$m_k \le m'_k,\ m''_k \qquad (2)$$

точная нижняя грань ф-ии на всём мн-ве не может быть больше её точной нижней грани на частях этого мн-ва (в нашем случае $m_k = m'_k$ и $m_k < m''_k$)

$$m'_k,\ m''_k \le M_k \le M \qquad (2')$$

Будет исполь-но в дальнейшем (при доказ-ве утв-ния II.2)

Поскольку все остальные точки (кроме добавленной x') у разбиений T_2 и T_1 одинаковые:

$$T_2 = \{x_1, \ldots, \overbrace{x_{k-1}, x'}^{\Delta x'_k}, \ldots\}$$

$$T_2 = \{x_1, \ldots, x_{k-1}, \overbrace{x', x_k}^{\Delta x''_k}, \ldots, x_n\},$$

$$T_1 = \{x_1, \ldots, \underbrace{x_{k-1}, x_k}_{\Delta x_k}, \ldots, x_n\},$$ то

$$\overline{\overline{S}}_2-\overline{\overline{S}}_1=\Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} m_i\Delta x_i + m_k'\Delta x_k' + m_k''\Delta x_k''\Big)-$$ 24.7

$$-\Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} m_i\Delta x_i + m_k\Delta x_k\Big) = \underbrace{\overbrace{m_k'}^{\geq m_k}\Delta x_k' + \overbrace{m_k''}^{\geq m_k}\Delta x_k'' - m_k\Delta x_k}_{} \overset{(2)}{\geq} (3)$$

$$\overset{(2)}{\geq} m_k\Delta x_k' + m_k\Delta x_k'' - m_k\Delta x_k = m_k(\Delta x_k' + \Delta x_k'' - \Delta x_k) \overset{(1)}{=} 0,$$

т.е. $\overline{\overline{S}}_2-\overline{\overline{S}}_1\geq 0 \Rightarrow \overline{\overline{S}}_2\geq\overline{\overline{S}}_1$

~~Итак~~ Т.о., при добавлении к разбиению одной точки его нижняя сумма не убывает. Но это значит, что и при добавлении нескольких точек нижняя нижняя сумма не может стать меньше, т.к. разбиение с несколькими новыми точками можно получить из исходного разбиения путём последовательного добавления к нему по одной новой точке:

$$\not\Rightarrow T_2 = T_1 + x^1 + x^2 + \dots + x^p$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \overline{\overline{S}}_2 & \overline{\overline{S}}_1\equiv\overline{\overline{S}}_1^0 & \overline{\overline{S}}_1^1 & \overline{\overline{S}}_1^2 & \overline{\overline{S}}_1^p\equiv\overline{\overline{S}}_2 \end{array}$$

$\Rightarrow \overline{\overline{S}}_1\leq\overline{\overline{S}}_1^1\leq\overline{\overline{S}}_2^2\leq\dots\leq\overline{\overline{S}}_1^p\equiv\overline{\overline{S}}_2$, т.е. $\overline{\overline{S}}_1\leq\overline{\overline{S}}_2$ чтд Δ

Итак, мы убедились в том, что $\overline{\overline{S}}_2-\overline{\overline{S}}_1\geq 0$ и $\underline{\underline{S}}_1-\underline{\underline{S}}_2\geq 0$ (предполагается, что эту разность мы тоже оценили). Получим теперь верхнюю оценку для разностей указанных сумм Дарбу

Утв II.2 Пусть $T_2 = T_1 + x^1 + \ldots + x^p$. Тогда

из большего вычитается меньшее

$$\overline{\overline{S}}_2 - \overline{\overline{S}}_1,\ \underline{\underline{S}}_1 - \underline{\underline{S}}_2 \leq p(M-m)\Delta, \qquad (\text{II}.2)$$

здесь индексы 1 и 2 по-прежнему относятся к разбиениям T_1 и T_2 **соотв-но**

где $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, **Δ** – диаметр T_1

Δ Докажем **эту** оценку для нижних сумм Дарбу (для верхних док-во ан-но)

Пусть сперва к разбиению T_1 добавлена всего одна точка $x' \in (x_{k-1}, x_k)$:

$$T_2 = T_1 + x',\ x' \in (x_{k-1}, x_k)$$

Напомню, что при док-ве утв-ия II.1 нами была получена след-ая ф-ла (ф-ла (3)):

$$\overline{\overline{S}}_2 - \overline{\overline{S}}_1 \underset{(3)\text{ из утв II.1}}{=} m'_k \Delta x'_k + m''_k \Delta x''_k - m_k \Delta x_k, \qquad (3)$$

мы оставили её прежний номер

где

$$m'_k = \inf_{[x_{k-1}, x']} f(x),\ m''_k = \inf_{[x'_k, x_k]} f(x),$$

$$\Delta x'_k = x' - x_{k-1},\ \Delta x''_k = x_k - x'$$

Чтобы с помощью ф-лы (3) оценить $\bar{\bar{S}}_2 - \bar{\bar{S}}_1$, заметим, что $\forall k = \overline{1, n}$ справ-во:

(4) $m_k \geq m$ (см. (2) из док-ва утв II.1)

минимум на всём отр-ке $[a, b]$ не может быть больше мин-ма на его частях-отр-х $[x_{i-1}, x_i]$

(5) $m'_k, m''_k \leq M_k \leq M$ (см. (2') там же)

максимум на всём отр-ке $[a, b]$ не может быть меньше max-ма его частях-отр-х $[x_{i-1}, x_i]$

для удобства будем придерживаться сквозной нумерации формул из док-тв утв-ий II.1 и II.2

Из (3), (4) и (5) получаем

$$\bar{\bar{S}}_2 - \bar{\bar{S}}_1 = \underbrace{m'_k}_{\leq M \ (5)} \Delta x'_k + \underbrace{m''_k}_{\leq M \ (5)} \Delta x''_k - \underbrace{m_k}_{\geq m \ (4)} \Delta x_k \leq$$

по опр-ию Δ

$$\leq M \underbrace{(\Delta x'_k + \Delta x''_k)}_{= \Delta x_k} - m \Delta x_k = (M - m) \Delta x_k \leq (M - m) \Delta \quad (6)$$

$= \Delta x_k \leftarrow$ см. (1) из док-ва утв-я II.1

Пусть теперь

$$T_2 = T_1 + x^1 + \dots + x^p \equiv T_1^p$$

$$\bar{\bar{S}}_2 \qquad \bar{\bar{S}}_1 \equiv \bar{\bar{S}}_1^0 \qquad \bar{\bar{S}}_1^1 \qquad \bar{\bar{S}}_1^p \equiv \bar{\bar{S}}_2$$

Тогда, применяя p раз формулу (6), имеем

24.10

$T_1^2 \quad T_1^1 \quad T_1$

$$\bar{\bar{S}}_1^1 - \bar{\bar{S}}_1 \le (M-m)\Delta$$

$$\bar{\bar{S}}_1^2 - \bar{\bar{S}}_1 = \underbrace{\left(\bar{\bar{S}}_1^2 - \bar{\bar{S}}_1^1\right)}_{\le (M-m)\Delta} + \underbrace{\left(\bar{\bar{S}}_1^1 - \bar{\bar{S}}_1\right)}_{\le (M-m)\Delta} \le 2(M-m)\Delta$$

т.к. $T_1^2 = T_1^1$ + одна точка + мы учитываем, что

$T_1^1 = T_1$ + одна точка $\quad \Delta(T_1^p) \le \Delta(T_1) \equiv \Delta$

(добавление новых т-ек не увелич-ет диам-ра разбиения)

——— " ———

$$\bar{\bar{S}}_1^p - \bar{\bar{S}}_1 \equiv \bar{\bar{S}}_2 - \bar{\bar{S}}_1 \le p(M-m)\Delta \leftarrow \text{чтд}$$

$\not\Delta$

III) (эта и последующие части содержат по одному св-ву)

Утв III $\quad \forall T_1, T_2 \Rightarrow \bar{\bar{S}}(T_1) \le \underline{\underline{S}}(T_2) \qquad$ (III)

Δ Идея док-ва состоит в переходе к разбиению T, являющемуся ~~одновременно~~ измельчением ($T = T_1 \cup T_2$) разбиений T_1 и T_2 одновр-но:

$$T = T_1 \cup T_2 \Rightarrow T \supset T_1 \text{ и } T \supset T_2$$

Тогда на основании утв-й I.1 и II.1 имеем

$$\bar{\bar{S}}(T_1) \underset{\mathrm{II}.1}{\le} \bar{\bar{S}}(T) \underset{\mathrm{I}.1}{\le} \underline{\underline{S}}(T) \underset{\mathrm{II}.1}{\le} \underline{\underline{S}}(T_2) \Rightarrow \bar{\bar{S}}(T_1) \le \underline{\underline{S}}(T_2) \leftarrow \text{чтд}$$

$\not\Delta$

IV) Фиксируем нек-ое (любое) разбиение T_0

Напомню, что раньше произвольное разбиение отр-ка $[a,b]$ обозначалось через $\{x_i\}$, а фиксир-ое – через T. Но это касалось прежде всего $\int$-ых сумм: $I(x_i, \xi_i)$ (вообще и в случае $\int$-ых сумм это не принципиально: можете писать как $I(x_i, \xi_i)$, так и $I(T, \xi_i)$, разница есть лишь когда мы рассм-аем $\{I(x_i, \xi_i)\}$ – все $\int$-ые $\sum$-ы и $\{I(T, \xi_i)\}$ – все $\int$-ые $\sum$-ы для данного T). В случае же с суммами Дарбу как правило придерживаются другого соглашения, считая, что T – это произвольное разбиение, а T с каким-н индексом, скажем, T_0, T_1, T_2 и т.д. – это фиксированное разбиение

Поскольку $\forall T \Rightarrow \overline{\overline{S}}(T) \overset{(\text{III})}{\leq} \underline{\underline{S}}(T_0)$ и $\underline{\underline{S}}(T) \overset{(\text{III})}{\geq} \overline{\overline{S}}(T_0)$,

то мн-во $\{\overline{\overline{S}}(T)\}$ # огр-но сверху,

а мн-во $\{\underline{\underline{S}}(T)\}$ огр-но снизу

$\Rightarrow$ сущ-ют

$$\sup_{T[a,b]} \{\overline{\overline{S}}(T)\} \equiv \underline{I} \quad \text{и} \quad \inf_{T[a,b]} \{\underline{\underline{S}}(T)\} \equiv \overline{I}$$

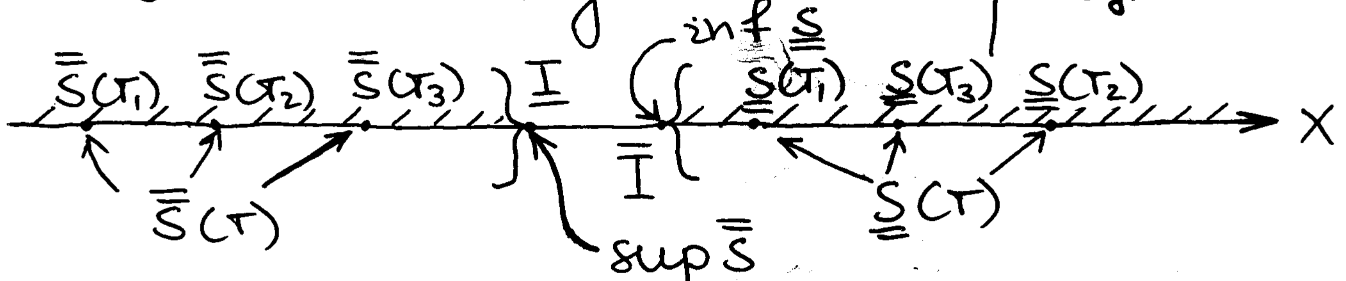
Опр $\underline{I}$ и $\overline{I}$ наз-ся соотв-но нижним и верхним $\int$-ми Дарбу ~~от~~ по отр-ку $[a,b]$ от ф-ии $f(x)$
Числа

А почему так обозначают: $\underline{I}$ и $\overline{I}$? | 24.12

Ведь казалось бы $\underline{I}$ — это sup-ум, а $\overline{I}$ — inf-ум? Дело в том, что $\underline{I}$ и $\overline{I}$ — это инф-м и суп-м разных мн-тв и оказыв-ся, что $\underline{I} \le \overline{I}$, т.е. справ-во

Утв $\underline{\text{IV}}$ $\quad \underline{I} \le \overline{I}$

Я не буду приводить строгого док-ва, ограничившись наглядной иллюстрацией



$\forall\, \overline{\overline{S}} \le \forall\, \underline{\underline{S}} \Rightarrow \sup \overline{\overline{S}} \equiv \underline{I} \le \inf \underline{\underline{S}} \equiv \overline{I}$

Δ Строгое док-во дать самост-но (от противного), опираясь на приведённую иллюстрацию и опред-ия точных граней

Итак, по опр-ию точных граней мн-в $\{\overline{\overline{S}}(T)\}$ и $\{\underline{\underline{S}}(T)\}$

$\forall T \Rightarrow \overline{\overline{S}}(T) \le \underline{I} \le \overline{I} \le \underline{\underline{S}}(T)$ $\quad (\underline{\text{IV}})$

$\underline{\text{V}}$) Опр $\quad C = \lim\limits_{\Delta\to 0} \underline{\underline{S}}(T)$, если

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall T[a,b] : \Delta(T) < \delta \Rightarrow |\underline{\underline{S}}(T) - C| < \varepsilon$

$\lim\limits_{\Delta\to 0} \overline{\overline{S}}(T)$ опр-ся полностью ан-но

Зам Диаметр разбиения Δ можно рассматривать как ф-ию Δ, которая каждому разбиению T ставит в соотв-ие положит-ое веществ-ое число — max-ую из длин частичных отр-ов этого разбиения:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{число}\,(>0)}}{\Delta} = \Delta(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{разбиение}}}{T})$$

Лемма Дарбу

$$\lim_{\Delta \to 0} \overline{\overline{S}}(T) = \underline{\underline{I}} \equiv \sup_T \{\overline{\overline{S}}(T)\}$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \underline{\underline{S}}(T) = \overline{\overline{I}} \equiv \inf_T \{\underline{\underline{S}}(T)\}$$

(здесь $\underline{I}$ и $\overline{I}$ — введённые выше нижний и верхний $\int$-лы Дарбу соотв-но)

Δ Приведём док-во для верхних сумм (для нижних оно полностью ан-но)

Обозначим через m и M соотв-но inf-ум и sup-ум ф-ии $f(x)$:

$$m \equiv \inf_{[a,b]} f(x), \quad M \equiv \sup_{[a,b]} f(x)$$

и рассм-им два случая: а) $m = M$ и б) $m < M$

Δа) Пусть сперва $m = M$

$\Rightarrow f(x) = \text{const} = m = M \equiv C$

Поэтому

$$\forall T \Rightarrow \underline{\underline{S}} = \sum_{i=1}^{n} \cancel{M_i} \Delta x_i = M \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = M(b-a)$$

а значит

1) $\lim\limits_{\Delta \to 0} \underline{\underline{S}}(T) = \lim\limits_{\Delta \to 0} \overbrace{M(b-a)}^{\text{const}} = M(b-a)$

2) $\overline{I} \equiv \inf\limits_{T} \{\underline{\underline{S}}(T)\} = \inf\limits_{T} \{M(b-a)\} = M(b-a)$

мн-во, состоящее из одной точки $M(b-a)$

Из 1)+2) сразу же вытекает, что

$\lim\limits_{\Delta \to 0} \underline{\underline{S}}(T) = \overline{I} \leftarrow$ ч.т.д. $\blacktriangle$ а)

Δ б) Пусть теперь $m < M$

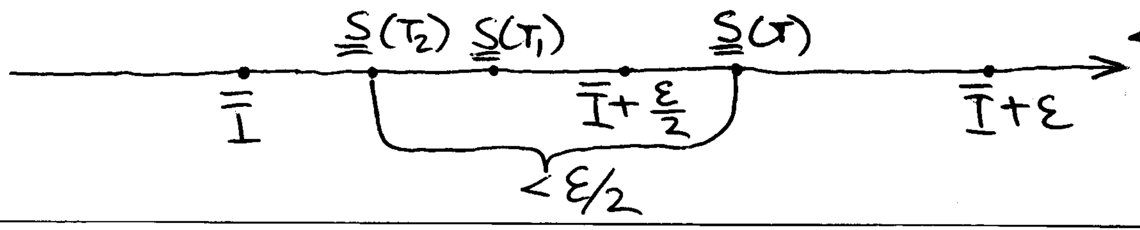
Нам надо док-ть, что $\lim\limits_{\Delta \to 0} \underline{\underline{S}}(T) = \overline{I}$, т.е. согласно опр-ию предела надо док-ть, что

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ и } \forall T[a,b] : \Delta(T) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |\overbrace{\underline{\underline{S}}(T) - \overline{I}}^{\geq 0 \ (\text{см.} (\underline{\text{IV}}))}| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{S}}(T) < \overline{I} + \varepsilon \qquad (1)$$

т.к. $\forall T \Rightarrow \underline{\underline{S}}(T) \geq \overline{I} \equiv \inf\{\underline{\underline{S}}(T)\}$



$\leftarrow$ схема последующего док-ва

Прежде всего заметим, что поскольку

$\overline{I} = \inf\limits_{T} \underline{\underline{S}}(T)$, то по опр-нию inf-ма

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists T_1 : \underline{\underline{S}}(T_1) < \overline{I} + \varepsilon/2$, (см. рисунок)

т.е. $\exists\, T_1(\varepsilon)$: $\leftarrow$ ф-ия $T_1 = T_1(\varepsilon)$, которая каждому $\varepsilon > 0$ ставит в соотв-ие нек-ое разбиение T_1

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow S(T_1(\varepsilon)) < \overline{I} + \varepsilon/2$ (2)

Пусть p – число точек в разбиении T_1:

$T_1 = \{x_1, \dots, x_p\}$

~~Зам~~ Поскольку $T_1 = T_1(\varepsilon)$, то $p = p(\varepsilon)$

вообще говоря, растёт с уменьшением ε

Дополн-но:

(или более подробно: $p = p(T_1) = p(T_1(\varepsilon)) \equiv p(\varepsilon)$, т.е. p по существу яв-ся сложной ф-ей ε: число $\varepsilon \to$ разбиение $T_1 \to$ число p)

Возьмём $\delta(\varepsilon) \equiv \dfrac{\varepsilon}{2p(\varepsilon)(M-m)}$ (3)

и покажем, что таком выборе справ-во высказывание (1) (заметим, что в предыдущем случае мы не могли выбрать такое δ, ~~но~~ т.к. $M - m = 0$ – именно поэтому случай $m = M$ и рассматривалось отдельно)

Зафиксируем произвольное ε и произвольное разбиение $T[a,b]$: $\Delta(T) < \delta(\varepsilon)$

Напомню, что нам надо убедиться в справ-ти нер-ва (1):

(1) $\underline{\underline{S}}(T) < \overline{\overline{I}} + \varepsilon$

Для того, чтобы установить справ-сть этого нер-ва достаточно док-ть, что $\underline{\underline{S}}(T)$ не может превосходить $\underline{\underline{S}}(T_1)$ на величину большую, чем $\varepsilon/2$. Поскольку само $\underline{\underline{S}}(T_1)$, в свою очередь, строго меньше, чем $\overline{\overline{I}} + \varepsilon/2$, это будет означать, что $\underline{\underline{S}}(T)$ меньше, чем $\overline{\overline{I}} + \varepsilon/2$ и ещё раз $+\varepsilon/2$, т.е. меньше, чем $\overline{\overline{I}} + \varepsilon$ (см. рис. выше), а это и есть искомое нер-во $\underline{\underline{S}}(T) < \overline{\overline{I}} + \varepsilon$

Но на намеченном нами пути есть одно затруднение: мы не можем непосредственно сравнить $\underline{\underline{S}}(T)$ и $\underline{\underline{S}}(T_1)$. Дело в том, что мы умеем сравнивать суммы Дарбу только таких разбиений, одно из которых явл-ся измельчением остальных (см. утв-ия $\overline{\text{II}}.1$ и $\overline{\text{II}}.2$). Но каким бы мелким ни было разбиение Т (т.е. каким бы малым диаметром это разбиение ни обладало), оно, вообще говоря, не является измельчением разбиения T_1 (так ~~поскольку~~ как даже если T_1 и содержит намного меньше точек, чем Т, среди точек разбиения T_1 всё равно могут быть точки, не $\in$-ие разбиению Т). Чтобы преодолеть данное затруднение, перейдём к разбиению T_2, являющемуся объединением разбиений Т и T_1 (напомню, что таким приёмом мы уже пользовались при доказат-ве утв-ия $\underline{\text{III}}$):

Введём вспомогат-ое разбиение $T_2 \equiv T \cup T_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow T_2 = T + p$ точек разбиения T_1

Тогда, поскольку $\mathbf{T_2}$ явл-ся измельчением разбиений Т и T_1, то с одной стороны

$$(4) \quad \underset{=}{S}(T_2) \underset{\underline{\text{II}}.1}{\le} \underset{=}{S}(T_1),$$ (здесь мы воспринимаем T_2 как измельчение T_1)

а с другой стороны
из большего вычитаем меньшее
$$\underset{=}{S}(T) - \underset{=}{S}(T_2) \underset{\underline{\text{II}}.2}{\le} p(M-m)\Delta(T) \underset{0<\Delta(T)<\delta(\varepsilon)}{<} p(M-m)\delta(\varepsilon) \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} \cancel{p(M-m)} \frac{\varepsilon}{2\cancel{p(M-m)}} = \frac{\varepsilon}{2} \qquad (5)$$

В итоге, на основании (2), (4) и (5) приходим к выводу, что

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ и } \forall T : \Delta(T) < \delta(\varepsilon) \overset{(5)}{\Longrightarrow} \underline{\underline{S}}(T) < \underline{\underline{S}}(T_2) + \frac{\varepsilon}{2} \overset{(4)}{\leqslant}$$

$$\overset{(4)}{\leqslant} \underline{\underline{S}}(T_1) + \frac{\varepsilon}{2} \overset{(2)}{<} \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \overline{I} + \varepsilon,$$

т.е. приходим к нер-ву (1), справедлив-ть которого и означает, что $\lim\limits_{\Delta \to 0} \underline{\underline{S}}(T) = \overline{I}$ ← чтд

$\not\Delta$ б)

Лемма Дарбу полностью доказана $\not\Delta$