Лекция 25

§3 Критерии интегрируемости

В этом параграфе мы приведём и докажем два необходимых и достаточных условия $\int$-мости ф-иб. Напомню, что необходимые и дост-ые условия принято называть критериями

Критерий 1

Теорема 1 (Критерий 1 $\int$-мости ф-ии)

Сущ-ие $\int\limits_a^b f(x)dx \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists T^*[a,b]: \\ \underline{\underline{S}}(T^*) - \overline{\overline{S}}(T^*) < \varepsilon\end{array}}$

где $\underline{\underline{S}}(T)$ и $\overline{\overline{S}}(T)$ — соотв-но верхняя и нижняя суммы Дарбу ф-ии $f(x)$

Зам Критерием 1 будем называть как само утв-ие теоремы 1, так и его правую часть

Теорема 2 (Критерий 2 $\int$-мости ф-ии)

Сущ-ие $\int\limits_a^b f(x)dx \Leftrightarrow \boxed{\underline{I} = \overline{I}}$ ← Критерий 2

где $\underline{I}$ и $\overline{I}$ - ~~нижний~~ соотв-но нижний и верхний $\int$-лы Дарбу от ф-ии $f(x)$

Зам Ан-но случаю критерия 1, под критерием 2 будем подразумевать как само утв-ие теоремы 2, так и его правую часть

Δ Док-во критериев 1 и 2

Критерии 1 и 2 удобно доказать одновременно (это позволит нам избежать дублирования рассуждений и не доказывать по нескольку раз одно и то же)

Схема док-ва:

$$\left.\begin{tikzcd} \text{Крит-ий } 1 \arrow[rr, Rightarrow, "\mathrm{II}"] & & \text{Крит-й } 2 \arrow[dl, Rightarrow, "\mathrm{III}"] \\ & \exists\text{-ие } \int\limits_a^b f(x)dx \arrow[ul, Rightarrow, "\mathrm{I}"] & \end{tikzcd}\right\} \Rightarrow \begin{tikzcd} \text{Кр-й } 1 \arrow[rr, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & & \text{Кр-й } 2 \arrow[dl, Leftrightarrow] \\ & \exists\text{-ие } \int\text{-ла} & \end{tikzcd}$$

Δ I) Первый шаг

Пусть сущ-ет $\int\limits_a^b f(x)dx \equiv I \Rightarrow$ (по опр-ию $\int$-ла)

$\Rightarrow \exists$-ет $\lim\limits_{\Delta\to 0} I(x_i, \xi_i) = I$ (равный нашему $\int$-лу I)

По опр-ию предела $\int$-ных сумм последнее означает, что

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 : \forall T[a,b] : \Delta(T) < \delta$ и $\forall \{\xi_i\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |I(x_i, \xi_i) - I| < \frac{\varepsilon}{4}$,

и любого выбора промежуточных точек для разбиения T

т. е., что

$$\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists T^*[a,b] : \forall \{\xi_i\} \Rightarrow |I(T^*,\xi_i)-I| < \varepsilon/4 \qquad (1)$$

поскольку при каждом ε мы фиксировали разбиение T^*, то я пишу $I(T^*,\xi_i)$ вместо $I(x_i,\xi_i)$ (хотя это и не явл-ся сверхпринципиальным — просто так удобнее для восприятия)

Теперь настало время воспользоваться утв-ем I.2 (которое мы ещё ни разу не задействовали). Напомню его:

$$(\text{I}.2) \quad \overline{\overline{S}}(T^*) = \inf_{\xi_i}\{I(T^*,\xi_i)\}, \quad \underline{\underline{S}}(T^*) = \sup\{I(T^*,\xi_i)\}$$

фикс-но! фикс-но!

(поскольку I.2 спр-во $\forall T$, то оно спр-во и для $T=T^*$)

Согласно опр-ию inf-ма и sup-ма эти рав-ва означают, что

сущ-ет возможность выбора таких точек ξ_i (которые мы обозначим через $\xi_i^{\prime}$), что —и—

1) $\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists\{\xi_i\} \equiv \{\xi_i^{\prime}\}$:

$$I(T^*,\xi_i^{\prime}) \equiv I^{\prime} < \overline{\overline{S}}(T^*)+\varepsilon/2 \Rightarrow \overline{\overline{S}}(T^*) > I^{\prime}-\varepsilon/4$$

2) $\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists\{\xi_i\} \equiv \{\xi_i^{\prime\prime}\}$:

$$I(T^*,\xi_i^{\prime\prime}) \equiv I^{\prime\prime} > \underline{\underline{S}}(T^*)-\varepsilon/2 \Rightarrow \underline{\underline{S}}(T^*) < I^{\prime\prime}+\varepsilon/4$$

⌋Отсюда и из нер-ва (1) (справедливого для любого выбора промежуточных точек и, тем самым, справ-го для ∫-ых сумм I' и I'') для разности между $\underline{\underline{S}}(T^*)$ и $\overline{\overline{S}}(T^*)$ имеем

$$\underline{\underline{S}}(T^*) - \overline{\overline{S}}(T^*) < (I'' + \varepsilon/4) - (I' - \varepsilon/4) = I'' - I' + \varepsilon/2 =$$

$$= \underbrace{I'' - I}_{\varepsilon/4} + \underbrace{I - I'}_{\varepsilon/4} + \varepsilon/2 < \varepsilon$$

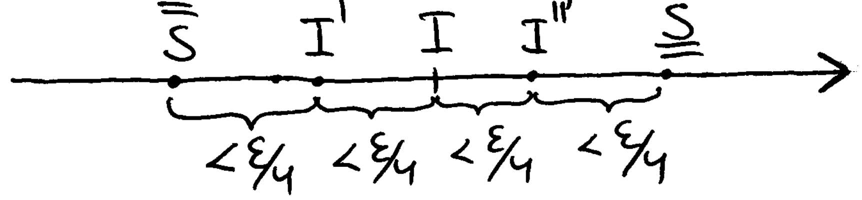
$\leftarrow$ см. (1)

Т.о. получается, что

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists T^*[a,b] : \underline{\underline{S}}(T^*) - \overline{\overline{S}}(T^*) < \varepsilon \leftarrow$ чтд

(поскольку это и есть критерий I)

Геом-ая иллюстрация док-ва



$\Rightarrow \underline{\underline{S}} - \overline{\overline{S}} < \varepsilon$ $\quad$ $\not\Delta$ I)

Δ **II**) Док-ем теперь, что из Кр-ия **1** $\Rightarrow$ Кр-ий 2

Итак, пусть выполнен критерий 1, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists T^*[a,b] : \underline{\underline{S}}(T^*) - \overline{\overline{S}}(T^*) < \varepsilon$

Требуется показать, что выполняется критерий 2: $\underline{I} = \overline{I}$, т.е., что нижний и верхний ∫-лы Дарбу равны друг другу

Напомню, что согласно утв-ию IV

(IV): $\overline{\overline{s}}(T^*) \le \underline{I} \le \overline{I} \le \underline{\underline{S}}(T^*)$ ← эти оценки справ-вы $\forall T$, а значит и д при $T = T^*$

Из данных неравенств сразу же имеем

$0 \le \overline{I} - \underline{I} \le \underline{\underline{S}}(T^*) - \overline{\overline{s}}(T^*) < \varepsilon \leftarrow \forall \varepsilon > 0$

Т.к. последнее нер-во справ-во $\forall \varepsilon > 0$, то из него сразу же вытекает, что

$\Rightarrow \overline{I} = \underline{I}$ ← чтд $\quad$ $\cancel{\Delta}$ II)

Δ III) Наконец, док-ем, что

из Кр-ия 2 $\Rightarrow \exists$-ие $\int\limits_a^b f(x)dx$

Итак, пусть выполнен критерий 2: $\underline{I} = \overline{I} \equiv$ $\equiv I$, т.е. нижний и верхний $\int$-лы Дарбу = друг другу

Заметим, что на основании леммы Дарбу

$\cancel{I} \; \underline{I} = \lim\limits_{\Delta \to 0} \underset{\{x_i\}}{\overline{\overline{s}}(T)} \equiv I$, $\quad \overline{I} = \lim\limits_{\Delta \to 0} \underset{\{x_i\}}{\underline{\underline{S}}(T)} \equiv I$

напомню, что разбиение T можно обозначать и таким способом

Кроме того, согласно утв-ию I.1 для любой $\int$-ной суммы $I(x_i, \xi_i)$ справ-во

$$(\text{I}.1)\quad \overline{\overline{S}}(x_i) \le I(x_i, \xi_i) \le \underline{\underline{S}}(x_i)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \quad \Delta \to 0$$

$$I \qquad I \qquad I$$

Несложно убедиться в том, что из сущ-ия пределов левой и правой частей последнего нер-ва вытекает сущ-ие предела его средней части, равного пределу левой и правой частей. (сравните с теоремой о двух полицейских для пределов функций). Строгое обоснование этого факта опирается на опр-ия пределов нижней и верхней сумм Дарбу, а также опр-ие предела f-ных сумм и остаётся в кач-ве самост-го упражнения

Дополн-но (строгое док-во):

⌈Мы знаем, что $\lim\limits_{\Delta\to 0} \overline{\overline{S}}(T) = \lim\limits_{\Delta \to 0} \underline{\underline{S}}(T) =$
$= \underline{I} = \overline{I} \equiv I$. Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall T : \Delta(T) < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{\overline{S}}(T) \le I < \overline{\overline{S}}(T) + \varepsilon \\ \underline{\underline{S}}(T) - \varepsilon < I \le \underline{\underline{S}}(T) \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S}}(T) - \varepsilon < I < \overline{\overline{S}}(T) + \varepsilon \Leftrightarrow$$

спр-вы всегда (напомню, что $\forall T \Rightarrow$ $\overline{\overline{S}}(T) \le \underline{I} \equiv I$ и $\underline{\underline{S}}(T) \ge \overline{I} \equiv I$ – впрочем эти нер-ва нам сейчас даже не понадобятся

$\Leftrightarrow -\overline{\overline{S}}(\tau) - \varepsilon < -I < +\varepsilon - \underline{\underline{S}}(\tau)$ (1)

Далее, $\forall T \equiv \{x_i\}$ и $\forall \{\xi_i\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{\overline{S}}(x_i) \leq I(x_i, \xi_i) \leq \underline{\underline{S}}(x_i)$ (2)

Т.о., получается, что

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall T : \Delta(T) < \delta$ и $\forall \{\xi_i\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} + \Rightarrow -\varepsilon < I(x_i, \xi_i) - I < +\varepsilon \Leftrightarrow |I(x_i, \xi_i) - I| < \varepsilon$

(утв-ие 1 никак не связано с точками ξ_i и, тем самым, спр-во при любом выборе этих точек)

а это и есть опр-ие того, что $\lim\limits_{\Delta \to 0} I(x_i, \xi_i) = I$

Но сущ-ие $\lim\limits_{\Delta \to 0} I(x_i, \xi_i) = I \Rightarrow$ влечёт за собой (по опред-ию)

$\Rightarrow$ сущ-ие $\int\limits_a^b f(x)dx = I \leftarrow$ чтд ($\cancel{\Delta}$ III)

Круг замкнулся! и тем самым теоремы 1 и 2 полностью доказаны $\cancel{\Delta}$

Пример

В качестве примера рассм-м ещё раз ф-ию Дирихле $D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{I} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Напомню, что мы уже убеждались в том,

что $D(x)$ не $\int$-ма ни на каком отрезке $[a,b]$ вещ-ой оси. При этом мы опирались на опр-ие предела $\int$-ных сумм, т.е. по сути на опр-ие самого опред-го $\int$-ла

Оказывается, этот результат можно получить и без использования предела $\int$-ных сумм, напр, с помощью 2-ой теоремы (критерия 2)

Задание. Док-ть, что для ф-ии $D(x)$ на $\forall$ отрезке $[a,b] \Rightarrow \underline{I} = 0$, $\overline{I} = b-a$

Тогда из того, что $\underline{I} \neq \overline{I}$ (поскольку $b > a$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (будет следовать, что) ф-ия $D(x)$ не $\int$-ема ни на каком отр-ке положит-ой длины

§3 Классы $\int$-мых функций

В этом §-фе, используя установленные выше критерии 1 и 2 $\int$-сти ф-ии, мы докажем $\int$-сть ф-ий из некоторых часто встречающихся классов. Начнём с класса непр-х ф-ий, т.е. док-ем, что любая непр-ая на отрезке ф-ия $\int$-ма на этом отр-ке

Док-во $\int$-ти непрерывных ф-ий опирает-

ся на понятие колебания ф-ии. Да-
дим опр-ие этого понятия

~~Опр~~ Пусть $m \equiv \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M \equiv \sup\limits_{[a,b]} f(x)$

Опр Разность, $\omega \equiv M-m$ наз-ся колебанием ф-ии $f(x)$ на отр-ке $[a,b]$

Колебание ф-ии на i-ом частичном отр-ке $[x_{i-1}, x_i]$ нек-го разбиения $T[a,b] = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ будем обозначать буквой ω_i:

$$\omega_i \equiv M_i - m_i, \ i=\overline{1,n}$$

С помощью колебаний ω_i разность верхней и нижней сумм Дарбу (ф-ии $f(x)$) $\underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T)$ можно представить в виде

$$\underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \quad (*)$$

Для док-ва теоремы об $\int$-сти непрерывной ф-ии нам понадобится утв-ие о малости колебаний непрер-ой ф-ии $f(x)$ на частичных сегментах разбиения отр-ка $[a,b]$. Сформулируем и, используя теорему Кантора и 2-ую т. Вейер-са, докажем это утв-ие

Утв Если $f(x)$ непр-на на $[a,b]$, то $\boxed{25.10}$

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists T^*[a,b] = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$:

$\forall i = \overline{1,n} \Rightarrow \omega_i < \varepsilon$

Δ Поскольку $f(x)$ непр-на на $[a,b]$, то по теореме Кантора она равн-но непр-на на этом отр-ке:

По т-ме Контора $\Rightarrow f(x)$ равн-но непр-на на $[a,b]$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x', x'' : \begin{cases} x', x'' \in [a,b] & (1) \\ |x' - x''| < \delta & (2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \qquad (3)$$ Напомню, что $\delta = \delta(\varepsilon)$

Пусть $T^*[a,b]$ – любое разбиение отр-ка $[a,b]$, диаметр которого меньше $\delta(\varepsilon)$:

Пусть $T^*[a,b] : \Delta(T^*) < \delta(\varepsilon)$

Оценим ω_i – колебания ф-ии $f(x)$ на частичных отр-ах разбиения T^*

Т.к. $f(x)$ непр-на на $[a,b]$, то она непр-на на любом частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения $T^* \Rightarrow$ по 2-ой теореме Вейерштрасса она достигает своих точных граней

m_i и M_i на каждом из этих сегментов, т.е.

$$\forall i=\overline{1,n} \Rightarrow \exists\, x', x'' \in [x_{i-1}, x_i] : f(x')=m_i, f(x'')=M_i$$

Тогда, поскольку x' и x'' удовлетв-ют условиям (1) и (2) опр-ия равн-ой непр-ти:

1) $x', x'' \in [x_{i-1}, x_i] \subset [a,b] \leftarrow (1)$

2) $|x''-x'| \leq x_i - x_{i-1} \equiv \Delta x_i \leq \Delta(T^*) < \delta(\varepsilon) \leftarrow (2)$

то согласно этому опр-ию они удовл-ют также и нер-ву (3)

$$\overset{(3)}{\Longrightarrow} |\underbrace{f(x'')}_{M_i} - \underbrace{f(x')}_{m_i}| < \varepsilon,$$

т.е. получается, что

$$\forall i=\overline{1,n} \Rightarrow \omega_i = M_i - m_i < \varepsilon \leftarrow \text{чтд} \qquad \blacktriangle$$

Теперь мы можем док-ть теорему об $\int$-сти непр-ой ф-ии

Теорема

$$\begin{matrix}\text{Непр-сть } f(x) \\ \text{на } [a,b]\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow\end{matrix} \quad \begin{matrix}\int\text{-мость } f(x) \\ \text{на } [a,b]\end{matrix}$$

Из $\int$-сти непр-ть не следует!

Δ Пусть $f(x)$ непр-на на $[a,b]$. Тогда согласно только что док-му утв-ию о малости колебаний непр-ой ф-ии на частичных сегментах разбиения отр-ка $[a,b]$ **25.12**

$\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists\, T^*[a,b] = \{x_1,\dots,x_{n-1}\} : \forall i=\overline{1,n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega_i < \dfrac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow$ (см. ф-лу (*))

$$\underline{\underline{S}}(T^*) - \overline{\overline{S}}(T^*) \overset{(*)}{=\!=} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_i =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\cancel{b-a}} \cancel{(b-a)} = \varepsilon \Longrightarrow \text{сущ-ет } \int_a^b f(x)\,dx \leftarrow \text{чтд}$$

по кр-ию 1 (см §2)

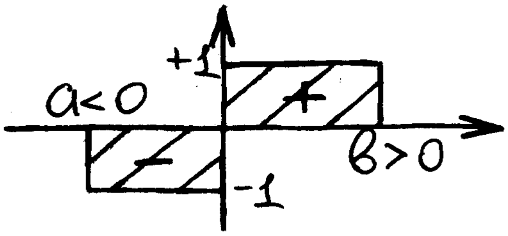
Δ

Как уже было подчёркнуто перед док-ом теоремы, непр-сть ф-ии не явл-ся необходимым условием её $\int$-мости. Многие разрывные ф-ии могут быть $\int$-мыми

Пример

Пусть $y = \operatorname{sign} x$

и пусть $[a,b]$: $a<0<b$



$$\Rightarrow I = \int_a^b \operatorname{sign} x = b + a = b - |a|$$

Этот результат легко может быть получен как с помощью предела $\int$-ых сумм, так и с помощую геом-ого смысла опр-го $\int$-ла (самый простой путь). Впрочем, геометр-ий смысл, в свою очередь, выводится через $\int$-ные суммы

Кроме того, можно воспользоваться аддитивным св-ом опр-го $\int$-ла и формулой Ньютона-Лейбница (здесь мы немного забегаем вперёд):

$$I = \underbrace{\int_a^0 (-1)dx + \int_0^b (+1)dx}_{\text{аддитивное св-во}} = \underbrace{-x\Big|_a^0 + x\Big|_0^b}_{\text{ф-ла Ньютона-Лейбница}} =$$

$$= -0-(-a)+b-0 = b+a$$

В то же время, разум-ся, далеко не всякая разрывная ф-ия явл-ся $\int$-ой (вспомните, напр, ф-ию Дирихле). В связи с этим возникает закономерный вопрос: а "сколько" вообще точек разрыва может иметь ф-ия (образно выражаясь, "насколько" она может быть разрывной), чтобы опр-ый $\int$-ал от неё, тем не менее, существовал?

Я не буду давать исчерпывающий ответ на этот вопрос (желающие могут найти его в учебнике Зорича), ограничусь лишь тем, что выделю достаточно широкий класс разрывных ф-ий, для которых сущ-ет опр-ый $\int$-ал. Отмечу, что все (ну или почти исключительно все) разрывные ф-ии, с которыми вы будете иметь дело, $\in$ ат этому классу

Опр Будем говорить, что мн-во $\mathcal{M}$ точек вещ-ой оси имеет длину нуль, если $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ конечное число N интервалов (a_i, b_i):

1) $\sum\limits_{i=1}^{N} (b_i - a_i) < \varepsilon$ (сумма длин которых $< \varepsilon$)

2) $\mathcal{M} \subset (a_1, b_1) \cup \ldots \cup (a_N, b_N)$ (мн-во $\mathcal{M}$ можно покрыть интервалами (a_i, b_i))

Зам Конечное число точек заведомо имеет длину нуль, но длину нуль может иметь и ∞-ное мн-во точек, напр, $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Оказ-ся, если мн-во точек разрыва ф-ии имеет длину нуль, то такая ф-ия явл-ся $\int$-емой

Теорема Пусть ф-ия $f(x)$:

1) опред-на и огр-на на $[a, b]$

2) $\mathcal{M} \equiv \{$мн-ву точек разрыва ф-ии $f(x)$, $\in$-их отр-ку $[a, b]\} \neq \emptyset$ и имеет длину нуль

$\Rightarrow$ ф-ия $f(x)$ $\int$-ма на $[a, b]$

Δ Даю без док-ва (на экзамен не выношу, но саму теорему знать надо)

Дополн-но (док-во):

⌐ Пусть $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$

не путать с обозначением мн-ва $\mathcal{M}$

Т.к. ф-ия $f(x)$ разр-на на $[a,b] \Rightarrow m < M$

(иначе $f(x) =$ бы const и, след-но, была непр-й)

Заметим ещё, что

$$\forall T[a,b] \equiv \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \text{ и } \forall i = \overline{1,n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_i = \underbrace{M_i}_{\geq M} - \underbrace{m_i}_{\leq m} \leq M - m \qquad (1)$$

Из опр-ия мн-ва длины нуль вытекает, что

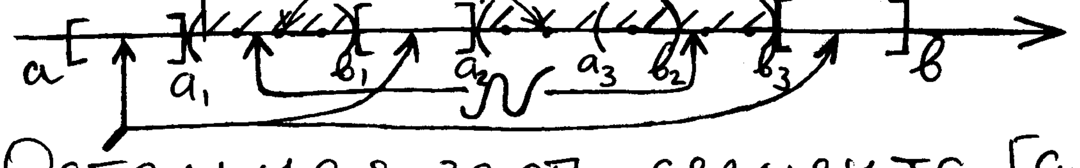
$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{n}$ (сущ-ие конечной системы интервалов):

$$1) \sum_{j=1}^{N} (b_j - a_j) < \frac{\varepsilon}{2(M-m)} \qquad (2)$$

2) $\mathcal{M} \subset (a_1, b_1) \cup \dots \cup (a_N, b_N) \equiv \mathcal{N}$ (не путать с числом N)

Напр

точки разрыва ф-ии $f(x)$



(интервалы могут пересекаться)

Остальная часть сегмента $[a,b] \equiv [a,b] \setminus \mathcal{N} \equiv$

$\equiv \mathcal{L}$ = сумме конечного числа непересекающихся отрезков $\equiv [c_1, d_1] \cup \ldots \cup [c_L, d_L]$

Зам Мы воспринимаем последнее утв-ие (про остальную часть сегмента) как самоочевидное, поскольку у нас имеется наглядная геометр-ая интерпретация отр-ов и интервалов (см. рисунок). Тем не менее, строго говоря, оно также нуждается в док-ве (с помощью метода мат индукции) - просто от вас этого док-ва не требуется

Т.о., $[a, b] = \mathcal{N} \cup \mathcal{L}$ ← нет точек разрыва

↑ есть точки разрыва

Тогда согласно утв-ию о малости колебаний непр-ой ф-ии (на частичных сегментах разбиения отр-ка вещ-ой оси)

$$\forall j = \overline{1, L} \text{ и } \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists T_j^*[c_j, d_j] \equiv \{\underset{\substack{\uparrow\\ c_j}}{x_0^{(j)}}, \ldots, \underset{\substack{\uparrow\\ d_j}}{x_{n_j}^{(j)}}\}:$$

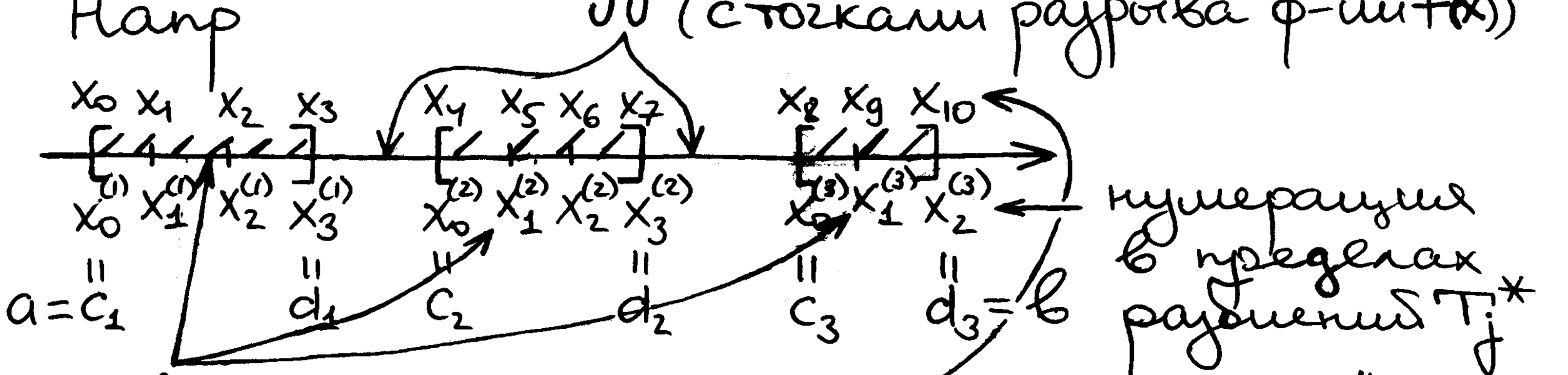
$$\forall i = \overline{1, n_j} \Rightarrow \omega_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad (3)$$

Зам Раньше мы не включали в разбиения отр-ов их граничные точки (поскольку формально они не считаются точками разбиения), однако для разбиений T_j^* по "техническим причинам" удобнее (в чём состоит это удобство, хорошо видно из приведённого ниже рисунка). Отмечу, что включение или невключение в разбиения отр-ов их граничных точек явл-ся вопросом соглашения и никак не отражается на существе опр-ия разбиения T отрезка $[a,b]$

Объединив разбиения T_j^* отр-ов $[c_j,d_j]$, получим некоторое разбиение T^* всего отр-ка $[a,b]$:

$$T_1^*[c_1,d_1]\cup\ldots\cup T_L^*[c_L,d_L]=T^*[a,b]\equiv\{x_1,\ldots,x_{n-1}\}$$

Напр



$\mathcal{L}$ (сравните с предыдущим рисунком)

те же точки, что и в T_j^*, только перенумерованные сквозным образом по всему $T^*=\{x_1,\ldots,x_9\}$ (или $\{x_0,\ldots,x_{10}\}$ в расширенном смысле)

Оценим колебания ω_i на частичных отр-х $[x_{i-1},x_i]$ разбиения $T^*[a,b]$. Для этого заметим, что ~~раз~~ каждый из отр-в $[x_{i-1},x_i]$ либо явл-ся частью некоторого отр-ка $[c_j, d_j]$, либо совпадает с одним из отр-ов $[a_j, b_j]$ — см. рисунок выше. В соотв-ии с этим зафиксируем ~~нек~~ произвольн-ое $i = \overline{1, n}$ и рассм-им два (взаимно исключающих) случая

I) Пусть $\exists j = \overline{1, N} : [x_{i-1}, x_i] = [a_j, b_j]$

$\Rightarrow$ (см. (1)) $\omega_i \leq M - m$ (1)

Мн-во всех таких номеров i (всего их N) обозначим через $\{i'\}$ ($\equiv \{i'\}$)

II) Пусть $\exists j = \overline{1, L} : [x_{i-1}, x_i] \subset [c_j, d_j]$

$\Rightarrow [x_{i-1}, x_i]$ — один из частичных отрезков разбиения $T_j^*[c_j, d_j]$

$\Rightarrow$ (см. (3)) $\omega_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ (3)

Мн-во всех таких номеров i (всего их L) обозначим через $\{i''\}$ ($\equiv \{i''\}$)

Теперь, имея оценки (1) и (3), колебаний ω_i, мы можем оценить разность $\underline{\underline{S}}(T^*)$ и $\overline{\overline{S}}(T^*)$ (верхней и нижней сумм Дарбу ф-ии $f(x)$ для разбиения T^* отр-ка $[a, b]$). Согласно ф-ле (*) из начала данного §-фа

$$\underline{\underline{S}}(T^*) - \overline{\overline{S}}(T^*) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i \in \{i'\}} \overset{\leq (1)}{\omega_i} \Delta x_i + \sum_{i \in \{i''\}} \overset{\leq (3)}{\omega_i} \Delta x_i$$

Отсюда с помощью соотношений (1) и (3) для разности $\underline{\underline{S}}(T^*) - \overline{\overline{S}}(T^*)$ получаем

$$\underline{\underline{S}}(T^*) - \overline{\overline{S}}(T^*) = \sum_{i\in\{i'\}} (M-m)\Delta x_i + \sum_{i\in\{i''\}} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\Delta x_i <$$

(первые Σ-ы равны, а 2ые соединены знаком <)

$\Delta x_i = b_j - a_j$

$$< (M-m)\underbrace{\sum_{j=1}^{N}(b_j-a_j)}_{<(2)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i\in\{i'\}\cup\{i''\} = \overline{1,n}} \Delta x_i <$$

$$< (M-m)\frac{\varepsilon}{2(M-m)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon$$

Итак, мы пришли к выводу, что

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists T^*[a,b] : \underline{\underline{S}}(T^*) - \overline{\overline{S}}(T^*) < \varepsilon$$

Но последнее утв-ие есть ни что иное, как критерий 1 $\int$-сти ф-ии $f(x)$ на отр-ке $[a,b]$, а значит

$\int_a^b f(x)dx$ действ-но сущ-ет чтд

Ещё одно дополнение (исчерпывающий ответ на вопрос об $\int$-сти разр-ых ф-ий):

Введём понятие мн-ва, имеющего меру нуль (сравните с опр-ем мн-ва, имеющего длину нуль)

Опр Будем говорить, что мн-во Ω точек веществ-ой оси имеет меру нуль (Лебегову меру нуль), если $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists$ конечного или счётного числа интервалов (a_i, b_i):

1) $\sum_{i=1}^{N}(b_i - a_i) < \varepsilon$ ← (в случае конечного числа интервалов)

или $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) < \varepsilon$ ← (в случае счётного числа интервалов)

2) $M \subset (a_1, b_1) \cup \ldots \cup (a_n, b_n)$ или $M \subset (a_1, b_1) \cup \ldots$

Зам 0 Здесь мы существенно забежали вперёд, использовав понятия суммы ряда и суммы ∞-го числа интер-в (впрочем эти понятия интуитивно очевидны и вы без труда сможете формализовать их сами)

Зам 1 Если мн-во имеет длину нуль, то оно, очевидно, имеет и Лебегову меру нуль. Обратное неверно (однако контрпримеры нетривиальны, поэтому я их здесь даже не привожу)

Зам 2 Про мн-во, имеющее длину нуль, говорят также, что оно имеет Жорданову меру нуль

Окаж-ся, справ-ва след-ая замечат-ая теорема (док-во см. в учебнике Зорича)

Теорема (Лебегов критерий ∫-сти по Риману)

$$\exists\text{-ие} \int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ f(x) \text{ опр-на и огр-на на } [a, b] \\ 2)\ \text{Мн-во всех точек раз-ва } f(x), \in\text{-их } [a,b], \text{ имеет Лебегову меру нуль} \end{cases}$$

Зам Если ф-ия имеет конечное число точек разрыва на данном отр-ке, то она заведомо ∫-ма по этому отр-ку, поскольку мн-во точек разрыва этой ф-ии на рассм-емом отр-ке, т. е. конечное число точек, как уже указывалось выше, имеет нулевую длину. В частности, ф-ия $y = \text{sign}\, x$ из рассмотренного выше примера ∫-ема по любому отрезку вещ-ой оси, т.к. она ограничена и имеет не более одной точки разрыва на каждом из отрезков:

$\underbrace{y}_{\text{Ф-я}} = \text{sign}\, x$ на $\forall [a,b]$ — либо имеет одну точку разрыва (при $a \cdot b) \leq 0$ + огран-ть; либо непр-на (при $a \cdot b > 0$) огран-ть же получается автомат-ки из 1-ой теоремы Вейерштрасса

$$\Rightarrow \forall [a,b] \text{ сущ-ет } \int_a^b \text{sign}\, x\, dx$$

В заключительной части этого §-фа | 25.22

сформулируем и док-ем теорему об $\int$-мости монотонной ф-ции (переносится на следующую лекцию)