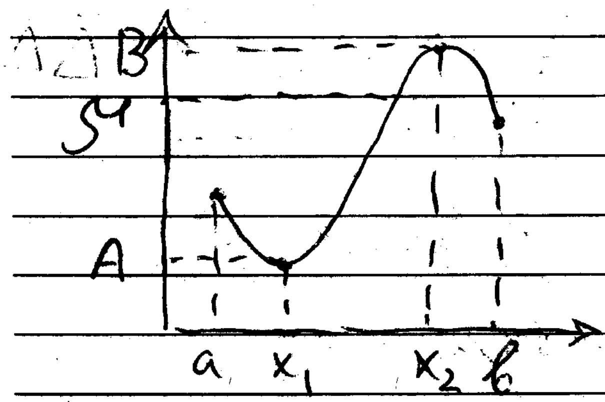
Зам Пусть f непр на $[a,b]$, [по из теор] о пр-ии непр ф-ии через пр-ые зн-ия $\Rightarrow$

$\exists \xi \in [a,b]: f(\xi)=\mu \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx$



Из 2-й теор В-са $\Rightarrow$

$\exists x_1, x_2 \in [a,b]:$

$f(x_1) = \inf\limits_{[a,b]} f(x) =: A$

$f(x_2) = \sup\limits_{[a,b]} f(x) =: B$

$\mu \in [A,B]$

Но тогда из теор о пр-ии непр ф-ии через все пром зн-ия $\Rightarrow \exists \xi \in [x_1, x_2] \subseteq [a,b]: f(\xi)=\mu$

$\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int\limits_a^b g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx$

Если же $g(x) \equiv 1 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ (*)

Утв (о перв-й для непр ф-ии)

Если $f(x)$ непр на $[a,b]$, то

$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ — одна из перв-х для $f(x)$ на $[a,b]$

фикс $\to a$ $\uparrow$ Иал с перем верхн пр-ом

(∃-ие ф-ла вытекает из непр-ти f)

Δ Надо д-ть, что

$\forall x \in [a,b] \Rightarrow F'(x) := \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x)$

$\Delta F := F(x+\Delta x) - F(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^{x} f(t)dt \stackrel{адд-ть}{=}$

$= \cancel{\int\limits_a^x} + \int\limits_x^{x+\Delta x} - \cancel{\int\limits_a^x} = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt \underset{\text{ср. зн-е } (*)}{=} f(\xi)(\cancel{x} + \Delta x - \cancel{x}),$

где $\xi = \xi(\Delta x) \in [x, x+\Delta x]$

$\xi \to x, \ \Delta x \to 0$

$\Rightarrow F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi(\Delta x))\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = f(x)$

▲

Теор (о ф-ле Ньютона-Лейбница)

Пусть $f(x)$ непр на $[a,b]$. Тогда

$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$ — ф-ла Н-Л

где $F(x)$ — ∀ перв-я для $f(x)$ на $[a,b]$

Δ Т.к. $F(x) = \underbrace{\int_a^x f(t)dt}_{\text{одна из перв-х — см предыдущ}} + C$, то

$F(b) - F(a) = \left(\int_a^b f(t)dt + \cancel{C} \right) -$

$- \left(\underbrace{\int_a^a f(t)dt}_{=0} + \cancel{C} \right) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$ Δ

Зад-ие. Д-ть теор о замене пер-й и f-ии по частям для опр ∫ов (с помощью Н-Л)

§1 Дост-ые усл-я лок-го экстр-ма

Пусть $y = f(x)$: $D_f = X \supset (a, b) \ni c$

Опр Г-т, что ф-я $f(x)$ имеет стр-й лок max в т. c, если $\exists \dot{O}_\delta(c) \subset X$, в кот $f(x) < f(c)$

1) $f(x) = x^2$ 2) $f(x) = |x|$ $x = 0$ — т. лок min

$f'(0) = 0$ $f'(0) = \not\exists$

Опр т. c наз т. возм экстр (критич. т-й) ф-ии $f(x)$, если f непр в т. c и $f'(c)=\left[\begin{array}{l}0\\ \varnothing\end{array}\right.$

3) $f(x)=x^3 \Rightarrow f'(0)=0$, но $x=0$ — не $\min$

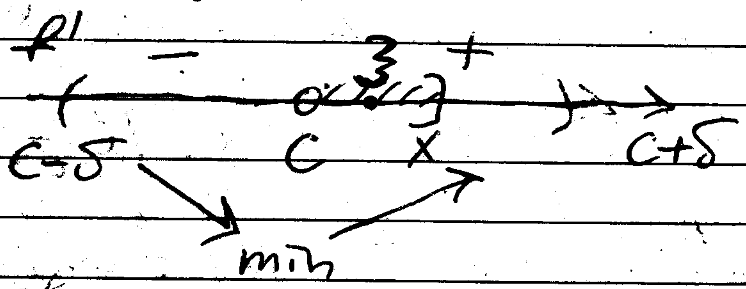
Теор 1 (1-ое дост усл экстр) Пусть:

1) c — т. возм экстр ф-ии $f(x)$
2) $f(x)$ дифф в нек $\mathring{O}_\delta(c)$
3) $f'(x) > 0$ при $x \in (c, c+\delta)$
   < 0 при $x \in (c-\delta, c)$

$\Rightarrow f(x)$ имеет стр лок $\min$ в т. c

Δ Надо д-ть, что $\forall x \in \mathring{O}_\delta(c) \Rightarrow f(x) > f(c)$

Зафикс $x \in \mathring{O}_\delta(c)$



Т.к. f дифф на $(c,x]$ и непр на $[c,x]$, то по т. Л-жа $\exists \xi \in (c,x)$: $f(x)-f(c)=f'(\xi)(x-c)$

Если $x \gtrless c \Rightarrow \xi \gtrless c \Rightarrow f'(\xi) \gtrless 0 \Rightarrow f(x) > f(c)$ 5

$\blacktriangle$

Теор 1+ (об отсутствии лок экстр) Пусть вып усл 1) и 2) теор 1

и 3) $f'(x) \gtrless 0$ в $\dot{O}_\delta(c)$

$\Rightarrow f(x)$ не имеет лок экстр в т. c

Δ-ть сам-но

2) $f(x) = |x| \Rightarrow f'(x) \underset{x \neq 0}{=} \operatorname{sign} x \lessgtr 0$ при $x \lessgtr 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ - т. min

3) $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 > 0$ в $\forall \dot{O}_\delta(0) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ - нет. экстр

Теор 2 (2-ое дост усл экстр) Пусть:

1) $f'(c) = 0$ 2) $f''(c) \lessgtr 0$

$\Rightarrow f(x)$ имеет стр лок max (min) в т. c

Δ Пусть $f''(c) > 0 \Rightarrow f'(x)$ возр в т. $c \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \dot{O}_\delta(c) \subset X$, в кот $f(x) \gtrless f(c)$ при $x \gtrless c \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (см теор 1) $f(x)$ имеет стр лок min $\blacktriangle$

1) $f(x) = x^2 \Rightarrow \begin{cases} f'(0)=0 \text{ и } f''(0) \\ f''(0)=2>0 \end{cases} \Rightarrow x=0$ – т. min

§2 Направление выпукл-ти и точки перегиба

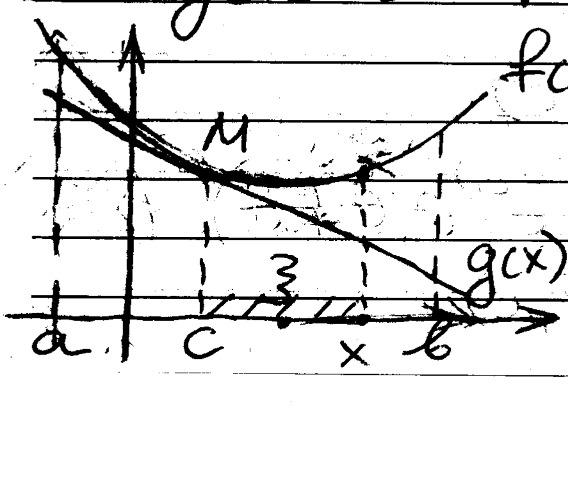
Пусть $y=f(x)$: $D_{f'}, \exists f'(a,b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in (a,b)\ \exists$ касат к гр-ку в т. $M(x, f(x))$ ($\not\parallel Oy$)

Опр Гр-к ф-ии $y=f(x)$ наз вып вверх на (a,b), если в пределах (a,b) гр-к лежит не выше $\forall$ своей касат-й

Теор 3 $f''(x) \geq 0$ на (a,b) $\Rightarrow$ гр-к $y=f(x)$ вып вниз

Δ Пусть c – $\forall$ т. из (a,b)



$y - y_0 = f'(c)(x-c)$

$g(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$

$f(x) = f(c) + f'(c)\underset{(x-c)}{\Delta x} + \dfrac{f''(\xi)}{2!}\Delta x^2$

ф-ла Т-ра $\quad \xi \in (c,x) \subset (a,b)$

$\Rightarrow f(x) - g(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2 \geq 0$ ▲

1) $f(x) = x^3 \Rightarrow f''(x) = 6x \Rightarrow$ вып вверх на $(0,1)$
вниз на $(-1,0)$

Пусть $D_f \supseteq (a,b) \ni c$, $D_{f'} \supseteq (a,c) \cup (c,b)$

Опр Т. $M(c, f(c))$ наз т. перегиба гр-ка ф-ии $y = f(x)$, если

1) в т. M $\exists$ касат к гр-ку (возм $\parallel OY$)

2) $\exists \delta > 0$: $f(x)$ выпукла в разные стороны на $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$

Теор 4 (необх усл перегиба) Пусть:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f''(x) \text{ непр в т. } c \\ 2)\ M(c, f(c)) - \text{т-ка} \\ \text{перегиба гр-ка } y = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f''(c) = 0$$

△ Доп-м, что $f''(c) > 0 \Rightarrow$ по теор об уст-ти знака непр ф-ии $\exists O_\delta(c)$, в кот

$f''(x)>0 \Rightarrow$ по пред теор гр-к явл-ся вып-м вниз на $(c-\delta, c+\delta) \Rightarrow$

$\Rightarrow c$ — не т. перегиба — прот-ие $\Rightarrow f''(c)=0$

Ан-но и $f''(c)<0$ Δ

2) $f(x)=x^4 \Rightarrow f''(x)=12x^2 \Rightarrow f''(0)=0$

Но $M(0,0)$ — не т. перегиба

Зам От треб-ия непр-ти f'' в т. c можно отказаться (~~чтобы в этом убедиться~~, сперва ~~имеет смысл~~ Δ-ть, что и опр-я вып-ти в смысле касат-х $\Rightarrow$ опр-ие в смысле секущих, и далее восп-ся последним)

Опр т. $M(c, f(c))$ наз т. возм перегиба, если
1) в т. M $\exists$ касат (возм $\parallel Oy$) к гр-ку $y=f(x)$
2) $f''(c)=\left[\begin{array}{l}0\\ \varnothing\end{array}\right.$

Теор 5 (1-ое дост усл перегиба) Пусть:

1) $M(c, f(c))$ – т. возм перегиба

2) $f(x)$ дважды дифф в нек $\dot{O}_\delta(c)$

3) $f''(x)$ имеет разн знаки при $x \in (c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$

$\Rightarrow$ гр-к $y = f(x)$ имеет перегиб в т. $M(c, f(c))$

Δ Из 3) $\overset{\text{Теор 3}}{\Longrightarrow}$ $f''(x)$ вып-ла в разные стороны на $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta) \Rightarrow$

$\Rightarrow M(c, f(c))$ – т-ка перегиба Δ

3) $f(x) = x^5 \Rightarrow f''(x) = 20x^3 \gtrless 0$ при $x \gtrless 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow M(0, 0)$ – т. перегиба

Теор 6 (2-ое дост усл перегиба) Пусть:

1) $f''(c) = 0$ 2) $f'''(c) \neq 0$

$\Rightarrow$ гр-к $y = f(x)$ имеет перегиб в т. $M(c, f(c))$

Δ Пусть $f'''(c) > 0 \Rightarrow f''(x)$ возр в т. $c \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \dot{O}_\delta(c) \subset (a,b)$, в кот $f''(x) \gtrless 0$ при $x \gtrless c \Rightarrow$
$\Rightarrow$ (см пред теор) т. $M(c, f(c))$ – т. перегиба

1) $f(x) = x^3 \Rightarrow f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow M(0,0)$ – т. перегиба

§3 Асимптоты гр-ка ф-ии

Опр Прямая $x = a$ наз верт-ой ас-ой гр-ка $y = f(x)$, если $\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty \end{array}\right.$

Пусть $D_f \supseteq (a, +\infty)$

Опр Прямая $y = kx + b$ наз накл-ой ас-ой гр-ка $y = f(x)$, при $x \to +\infty$, если
$f(x) = kx + b + \alpha(x)$, $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$
(Ан-но на $-\infty$)

Теор $y=kx+b$ – ас-та гр-ка $y=f(x)$ на $+\infty$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-kx] = b \end{cases}$ $\Uparrow$

Δ $y=kx+b$ – ас-та на $+\infty \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)-kx-b = \alpha(x)$ – б.м. на $+\infty \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-kx] = b$

$ \quad \parallel$

$x\left[\frac{f(x)}{x} - k\right]$

б.б. $\Rightarrow$ б.м. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ $\not\!\Delta$