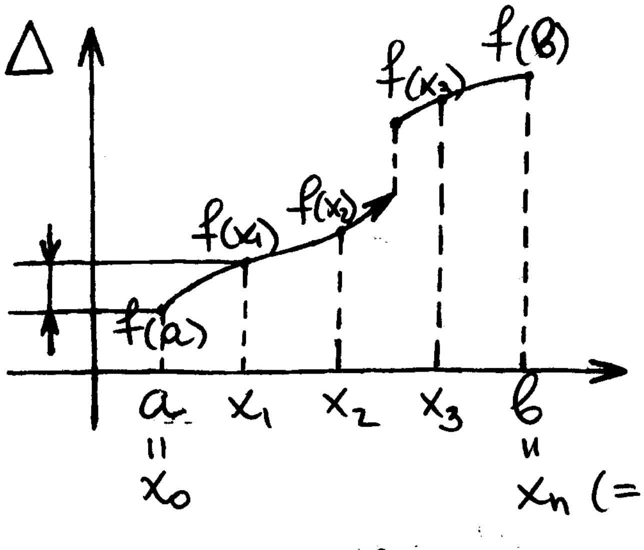
Лекция 26

Теорема

Монотонность $f(x)$ на $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\int$-мость $f(x)$ на $[a,b]$

Зам Условие теоремы не предполагает непрер-ти $f(x)$. Ф-ия $f(x)$ вполне может иметь точки разрыва на отр-ке $[a,b]$ (в том числе ∞-но много)



I) Если $f(x) = const \Rightarrow$ $\Rightarrow$ она $\int\limits_a^b$-ема как непрер-ая на отр-ке $[a,b]$

II) Пусть $f(x) \neq const$ и для определ-сти не убывает на $[a,b]$ (случай невозраст-ей ф-ии рассм-ся аналогично) $\Rightarrow f(a) < f(b)$

Пусть далее $T^*[a,b]$ – $\forall$ разбиение с диаметром $\Delta < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$:

~~От~~ $T^*[a,b]$ – $\forall$ разбиение: $\Delta(T^*) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$

Оценим разность сумм Дарбу разб-ия T^*

$$\underline{\underline{S}}(T^*) - \overline{\overline{S}}(T^*) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \overbrace{\Delta x_i}^{\leq \Delta(T^*)} \leq \Delta(T^*) \sum_{i=1}^{n} \omega_i <$$

(*) из начала текущего §-фа

$$< \frac{\varepsilon}{f(a)-f(b)} \sum_{i=1}^{n} \omega_i$$

Немного неожиданный ход — до этого мы всегда оценивали колебания ω_i, после чего выносили за знак суммы получившуюся оценку этих колебаний и суммировали все Δx_i, теперь же мы поступаем в некотором смысле наоборот — оцениваем длины частичных сегментов Δx_i, после чего выносим за знак суммы получившуюся оценку длин этих сегментов и сумм-ем все колебания ω_i

Найдём ~~сум~~ $\sum_{i=1}^{n} \omega_i$ (сумму ω_i). Поскольку $f(x)$ — неубыв-ая ф-ия, то

$$\forall i = \overline{1,n} \text{ и } \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow f(x_{i-1}) \leq f(x) \leq f(x_i),$$

$$\Rightarrow m_i \equiv \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \text{ и } \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \equiv M_i$$

в точках x_{i-1} и x_i достигаются, т.е. на самом деле $m_i = \min$, $M_i = \max$

а значит

$$\omega_i \equiv M_i - m_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

и $\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \equiv \omega_1 + \dots + \omega_n =$

$= (f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \dots + (f(x_n) - f(x_{n-1})) =$

$= -f(x_0) + \cancel{f(x_1)} - \cancel{f(x_1)} + \cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_2)} + f(x_3) - \dots -$

$- f(x_{n-1}) + f(x_n) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)$

(впрочем, этот результат можно признать геометрически очевидным — см. рисунок и выписать сразу)

Отсюда, возвращаясь к разности сумм Дарбу ф-ии $f(x)$, имеем

$$\underline{\underline{S}}(T^*) - \overline{\overline{S}}(T^*) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot (f(b) - f(a)) = \varepsilon$$

Т.о., получается, что

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists T^*[a,b] : \underline{\underline{S}}(T^*) - \overline{\overline{S}}(T^*) < \varepsilon$$

— но это есть ни что иное, как критерий 1 $\int$-мости ф-ии $f(x)$ на отр-ке $[a,b]$, а значит $\int\limits_a^b f(x)dx$ действ-но сущ-ет ∆

Зам. Возвращаясь ещё раз к примеру с функцией $y = \operatorname{sign} x$, видим, что убедиться в $\int$-мости ф-ии $\operatorname{sign} x$ по любому наперёд заданному отр-ку вполне можно и с помощью последней теоремы, т.к.

sign x не возрастает на всей веще-ой оси (а значит и на каждом её отрезке)

§4 Свойства опред-го $\int$-ла

1) Напомню, что опред-ый $\int$-ал $\int_a^b f(x)dx$ введён нами при условии, что $a<b$. Распространим понятие опр-го $\int$-ла на случай произвольных a и b, положив

$$\int_a^a f(x)\,dx \equiv 0 \quad и \quad \int_a^b f(x)\,dx \equiv -\int_b^a f(x)\,dx \text{ для } b<a$$

(заметим, что св-во $\int_a^b = -\int_b^a$ окажется при этом справ-ым $\forall$ a и b)

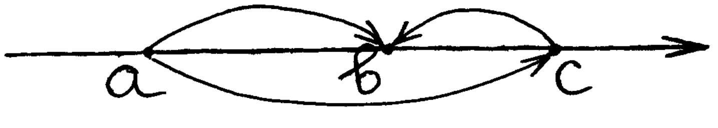
2) Линейность опред-го $\int$-ла

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

3) Аддитивность $\int$-ла

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Зам-ие



В этой ф-ле т-ка c не обязана лежать внутри интервала (a, b)

4) Монотонность $\int$-ла

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x) \text{ и } f_2(x)\ \int\text{-мы на } [a,b] \\ f_1(x) \le f_2(x) \text{ на } [a,b] \\ a \le b \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f_1(x)dx \le \int_a^b f_2(x)dx$$

5) $$\left.\begin{array}{l} f(x)\ \int\text{-ма на } [a,b] \\ a \le b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |f(x)|\ \int\text{-ем на } [a,b] \\ \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \end{array}\right.$$

~~Зам Из $\exists$-ия~~ Это доказывается с помощью критерия 1 $\int$-ти (см. §3) и ф-лы (*) из начала §4

Зам Из $\exists$-ия $\int_a^b |f(x)|dx \not\Rightarrow \exists$-ие $\int_a^b f(x)dx$

Контрпример

ф-ия Дирихле

$$f(x) = 2D(x) - 1 = \begin{cases} +1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

$\Rightarrow |f(x)| \equiv 1$ при $x \in \mathbb{R}$ — интегрируема по $\forall [a,b]$

Но сама ф-я $f(x)$ не $\int$-ма ни на каком отр-ке $[a,b]$ ~~положит-й~~ ненулевой длины (т.к. иначе, т.е., если бы $f(x)$ была $\int$-ма на нек-м отрезке $[a,b]$, ф-ия Дирихле $= \frac{f(x)+1}{2}$ тоже оказалась бы $\int$-ма на этом отр-ке, но мы знаем, что это не так, т.е., что ф-ия Дирихле не $\int$-ма ни на каком отр-ке вещ-ой оси)

Задание. Док-ть св-ва 2)–5) определённых $\int$-ов

§5 Формула среднего значения

Докажем следующую теорему

Теорема (о формуле среднего зн-ия). Пусть:

1) ф-ии $f(x)$ и $g(x)$ $\int$-мы на $[a,b]$

2) $\forall x \in [a,b] \Rightarrow g(x) \geq 0$

3) $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$

Тогда $\exists \mu \in [m,M]$: $\boxed{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx}$

ф-ла среднего значения

Зам 1 Случай $g(x) \leq 0$ сводится к случаю $g(x) \geq 0$ "перебрасыванием" минуса на функцию $f(x)$

Зам 2 Величину μ из ф-лы среднего значения наз-ют средним значением ф-ии $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ с весом $g(x)$ (при этом $g(x)$ называют весовой ф-ей или весом для ф-ии $f(x)$)

Зам 3 Теорема о ф-ле среднего значения

неявно опирается на утв-ие о том, что если $f(x)$ и $g(x)$ – $\int$-мые ф-ии, то их произв-ие $f(x)\cdot g(x)$ – также $\int$-мая ф-ия. Данное утв-ие предлагается док-ть самост-но (см. Ильин, Позняк). Кроме того, следует подчеркнуть, что в случае непр-ых ф-ий f и g интегр-ть произв-ия сразу ~~вытекает~~ из того, что $f(x)\cdot g(x)$ – также непр-ая ф-я

Δ Замечу, что нер-ва для ф-ий можно $\int$-ать (в том смысле, что мы всегда будем переходить к верным нер-ам), но нельзя диф-ать (можно получить неверный результат)

$$\begin{cases} m \le f(x) \le M \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \text{при } x\in[a,b] \Rightarrow \begin{matrix} m g(x) \le f(x)g(x) \le M g(x) \\ \text{при } x\in[a,b] \end{matrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (монотонность $\int$-ла)

$$\int_a^b m g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \int_a^b M g(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ (линейность $\int$-ла)

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx \qquad (1)$$

Кроме того, поскольку $g(x)\ge 0 \Rightarrow$ (монотонность $\int$-ла) $\int_a^b g(x)\,dx \ge \int_a^b 0\cdot dx = 0$

Далее рассм-м два случая

I) $\int_a^b g(x)dx = 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = 0 =$

$= \mu \cdot \underbrace{\int_a^b g(x)dx}_{=0}$, (т.к. левая и правая части двойного нер-ва (1) обращаются в нуль)

где μ — любое число

Т.о., ф-ла среднего значения справ-ва для любого μ, в том числе $\forall \mu \in [m, M]$ ЧТД

II) Пусть теперь $\int_a^b g(x)dx > 0$. Тогда, разделив нер-ва (1) на этот $\int$-ал, будем иметь

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \equiv \mu$$

Т.о., получается, что $\exists \mu \in [m, M]$:

$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \cdot \int_a^b g(x)dx$ ← ЧТД

(т.е. в случае когда $\int_a^b g\,dx > 0$ нам по сути просто требовалось показать, что $\mu \equiv \int_a^b fg\,dx \Big/ \int_a^b g\,dx \in [m, M]$, и мы это сделали)

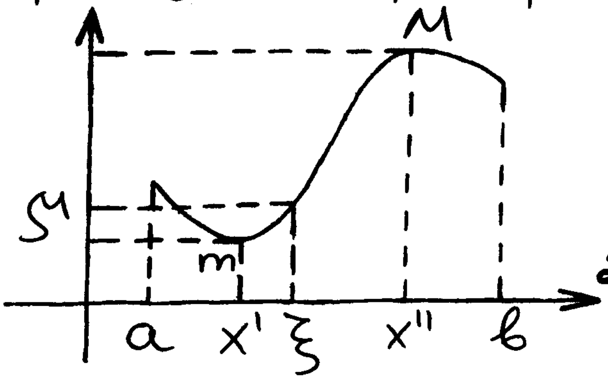
Теорема о формуле среднего значения полностью доказана

Δ

В качестве следствий из доказанной теоремы рассм-им несколько важных частных случаев ф-лы среднего значения

Следствия

1) Пусть выполнены условия теоремы о формуле среднего значения + $f(x)$ непрер-на на $[a,b]$. Тогда по теореме о прохождении непрер-ой ф-ии через все промежуточные значения (здесь есть некоторое лукавство — к той теореме, ~~котор~~ о непр-ой ф-ии, которую мы доказывали раньше, т.е. к утверж-ю о том, что $\forall\, C \in [f(a), f(b)] \Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b] : f(\xi) = C$, следует добавить 2-ую теорему Вейерштрасса)



1) $\exists\, x', x'' \in [a,b] : f(x') = m,$
$f(x'') = M$

2) $\forall\, \mu \in [m, M] \Rightarrow \exists\, \xi \in [x', x''] \subset [a,b] : \mu = f(\xi)$

След-но, в случае непр-ой ф-ии $f(x)$ формула среднего значения может быть представлена в виде

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx, \text{ где } \xi \in [a,b]$$

2) Положим в формуле среднего значения $g(x)\equiv 1$. Тогда эта формула примет след-ий вид

26.10

$$\int_a^b f(x)dx = \mu\int_a^b 1\cdot dx = \mu(b-a), \text{ где } \mu\in[m,M]$$

Зам Последнее равенство ~~нельзя~~ следует получить без использования ф-лы Ньютона-Лейбница, т.к. док-во самой ф-лы Н-Л опирается на формулу среднего значения (с $g(x)\equiv 1$ и непр-ой $f(x)$ – см. (*) ниже). Интеграл $\int_a^b 1dx$ можно найти с помощью определения $\int$-ла, т.е. как предел $\int$-ых сумм

3) Пусть теперь случаи 1 и 2 реализуются одновременно, т.е. пусть $f(x)$ непрер-на, а $g(x)\equiv 1$ на $[a,b]$. Тогда ф-ла среднего значения принимает наиболее простой вид

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a), \text{ где } \xi\in[a,b] \qquad (*)$$

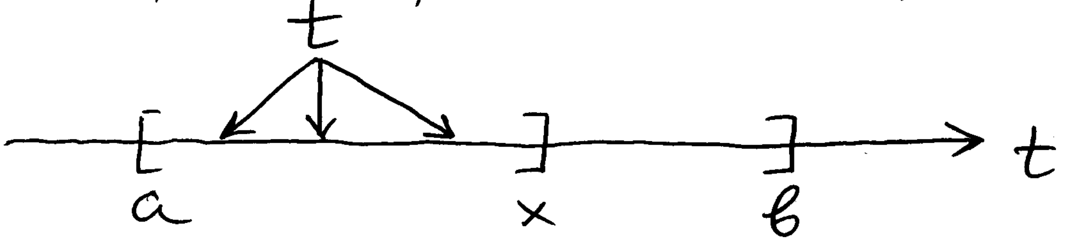
§6 Формула Ньютона-Лейбница

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ $\Rightarrow$ $f(x)$ непрерывна на $[a,x]$ при $\forall x\in[a,b]$ (т.к. $[a,x]\subset[a,b]$)

$\Rightarrow f(x)$ $\int$-ма на $[a,x]$ при $\forall x\in[a,b]$, 26.11

т.е. $\forall x\in[a,b]$ сущ-ет $\int_a^x f(t)dt \equiv F(x)$

интеграл с переменным верхним пределом



По сути $\int$-ал с переменным верхним пределом (от $f(x)$) — это ф-ия ($F(x)$), которая каждому

$x\in[a,b] \longmapsto \int_a^x f(t)dt$

Зам 1 Поскольку x выступает в качестве верхнего предела $\int$-ия, то ~~$\int$-ия~~ переменную из под$\int$-льного выражения опред-го $\int$-ла (переменную $\int$-ия) мы обозначили через t. Разумеется, существ-ие и величина опред-го $\int$-ла не зависят от выбора обозначения под$\int$льной переменной. Более того, иногда (в тех случаях, когда это не может приводить к путанице и недоразумениям) переменную $\int$ния обозначают той же буквой, что и один из пределов, напр

$$\int_a^x f(x)dx$$

Но пока что, для придания большей ясности и наглядности проводимым преобразованиям, мы будем стараться такого обозначения избегать $\boxed{26.12}$

Зам 2 Разум-ся, можно рассм-ать $\int$-лы с переменным нижним пределом и даже с переменными нижним и верхним пределами одновременно (в последнем случае это будет ф-ия двух аргументов).

Утв Если ф-ия $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \; (**) \text{ — одна из первообразных для } \quad (**)$$

$f(x)$ на $[a,b]$

Δ Согласно опр-ию первообразной нужно доказать, что

$$\forall x\in[a,b] \Rightarrow F'(x)\equiv \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=f(x)$$

Чтобы убедиться в справедливости этого соотношения, прежде всего распишем ΔF

$$\Delta F\equiv F(x+\Delta x)-F(x)=$$

$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^a f(t)dt+\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt=$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{аддитивность } \int\text{-ла}}}{=} \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

Теперь применим формулу среднего значения (*) к последнему $\int$-лу (подчеркну, что $f(t)$ непр-на на $[a,b] \supset [x, x+\Delta x]$ при малых Δx):

$$\exists\, \xi \in [x, x+\Delta x] : \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)\Delta x \qquad (1)$$

Напомню, что при поиске предела мы считаем, что x является фиксированной, а Δx – переменной величиной. В связи с этим точка ξ из отрезка $[x, x+\Delta x]$ рассм-ется как ф-ия Δx: $\xi = \xi(\Delta x)$, причём в силу неравенств

$$\begin{array}{ccccc} x & \le & \xi(\Delta x) & \le & x+\Delta x \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x & & x & & x \end{array} \qquad \Delta x \to 0$$

и теоремы о двух полицейских

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \xi(\Delta x) = 0 \qquad (2)$$

Тогда, подставляя ф-лу (1) в выражение для ΔF и используя соотн-ие (2), имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi(\Delta x))\cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{непр-сть } f(\xi)}}{=} f\Big(\lim_{\Delta x \to 0} \xi(\Delta x)\Big) \overset{\substack{\text{чтд}\\ \downarrow}}{=} f(x)$$

Δ

!Доказ-ое утв-ие позволяет получить ф-лу Ньютона-

-Лейбница — основную ф-лу ∫-ного исчисления, связывающую опред-ый ∫-ал с неопред-м (и явл-юся в нек-ом смысле обратной к ф-ле (**), выраж-ей первообр-ю через опред-ый ∫-ал)

Теорема (о формуле Ньютона–Лейбница)

Пусть $f(x)$ непр-на на отр-е $[a,b]$. Тогда

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \equiv F(x)\Big|_a^b}$$ — формула Н–Л,

где $F(x)$ — любая первообр-я для $f(x)$ на $[a,b]$

Δ Согласно доказ-му выше утв-ию об ∫-ле с переменным пределом (см. (**))

$F_1(x) = \int_a^x f(t)dt$ — одна из первообр-х для $f(x)$ на $[a,b]$. Но тогда $\forall$ первообр-я для этой ф-ии (в т.ч. и сама $F_1(x)$ при $C=0$) может быть представлена в виде $F(x) = F_1(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C$

Подставляя это выраж-е в правую часть ф-лы Н–Л, имеем $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt + \cancel{C} - \cancel{\int_a^a f(t)dt} - \cancel{C} =$
$= \int_a^b f(t)dt$ ← чтд $\blacktriangle$

Задание. С помощью ф-лы Н–Л и теорем о замене перем-й и ф-ле ∫-ия по частям для неопр-ых ∫-ов получить соотв-ие утв-ия для опр-ых ∫-ов (в случае затруднений см. Ильин, Позняк)