§4. Понятие числового ряда. Критерий Коши сходимости числового ряда.

Под словом "ряд"в математическом анализе понимают сумму бесконечного числа слагаемых. Рассмотрим произвольную числовую последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и образуем формальное выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Назовем это выражение *числовым рядом*, а числа a_k —*членами ряда*. Сумма

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется *частичной суммой* (n-ой частичной суммой) ряда.

Определение: числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

называется *сходящимся*, если сходится последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм. При этом число

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

называется *суммой ряда*. Если же последовательность частичных сумм ряда расходится, то такой ряд называется *расходящимся*.

Примеры:

1) ряд

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots,$$

где $|q| < 1$, сходится:

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \to \frac{1}{1-q} = S \quad \text{при} \quad n \to \infty;$$

2) ряд

$$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$$

расходится, поскольку

$$S_n = n, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty;$$

3) т.н. *гармонический ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

расходится:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots .$$

Сумма дробей в каждой такой скобке больше $1/2$, откуда вытекает, что $\{S_n\}$ —бесконечно-большая последовательность, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$$

и, значит, ряд расходится.

Теорема 5 (критерий Коши сходимости числового ряда).
Для того, чтобы ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

сходился, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists N,\ \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$$

Доказательство:

Сходимость числового ряда —это сходимость последовательности $\{S_n\}$ его частичных сумм, а для сходимости последовательности $\{S_n\}$, как было доказано в теореме 4, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N,\ \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$: $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, или

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon,$$

что и доказывает теорему.

Следствие 1 (необходимое условие сходимости ряда): если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

сходится, то $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство:

Поскольку ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

сходится, то выполнено условие

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$$

Возьмем $p = 1$: $|a_{n+1}| < \varepsilon \ \forall n > N$. Это и означает, что $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Отметим, что данное условие является необходимым, но не достаточным условием сходимости (пример —гармонический ряд, который расходится, хотя $a_n = 1/n \to 0$ при $n \to \infty$).

Следствие 2: если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

сходится, то

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Здесь r_n —это так называемый *остаток ряда*.

Доказательство:

Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S,$$

то $S = S_n + r_n$, а поскольку $S_n \to S$ при $n \to \infty$, то $r_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 6. Если ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

сходятся и их суммы равны соответственно S^A и S^B, то для любых чисел α и β ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$$

сходится и его сумма S выражается формулой $S = \alpha S^A + \beta S^B$.

Доказательство:

Для любого n имеем:

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Первое слагаемое стремится к αS^A, а второе —к βS^B при $n \to \infty$. Таким образом, предельный переход при $n \to \infty$ дает $S = \alpha S^A + \beta S^B$, что и требовалось доказать.

§5. Ряды с положительными членами.

Если все $a_k \geq 0$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

называется *рядом с положительными членами*. Члены такого ряда часто обозначают p_k:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \quad (p_k \geq 0).$$

Последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм в таком случае будет, очевидно, неубывающей и поэтому *для сходимости ряда с положительными членами необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченной.*

Признак сравнения.

Теорема 7. Пусть даны два ряда с положительными членами

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k$$

(обозначим их как ряд P и ряд Q соответственно), и пусть $\forall k$: $p_k \leq q_k$.

Тогда: 1) из сходимости ряда Q следует сходимость ряда P; 2) из расходимости ряда P следует расходимость ряда Q.

Доказательство:

Утверждение теоремы следует из неравенства

$$S_n^P = \sum_{k=1}^{n} p_k \leq \sum_{k=1}^{n} q_k = S_n^Q.$$

Пример: рассмотрим т.н. *обобщенный гармонический ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \quad (\alpha < 1).$$

Из сравнения с гармоническим рядом следует, что обобщенный гармонический ряд при $\alpha < 1$ расходится.

Замечания:

1) теорема 7 остается в силе, если неравенство $p_k \leq q_k$ выполнено, начиная не с $k = 1$, а с некоторого $k = k_0$.

2) теорема 7 остается в силе, если вместо неравенства $p_k \leq q_k$ выполнено неравенство $p_k \leq c \cdot q_k$, где $c > 0$ —некоторое число.

Задания на дом:

1) Доказать, что если существует

$$\lim_{k \to \infty} \frac{p_k}{q_k} = a > 0,$$

то ряды P и Q сходятся или расходятся одновременно.

2) Пусть

$$\lim_{k \to \infty} \frac{p_k}{q_k} = 0.$$

Сформулировать и доказать утверждение о связи между сходимостью или расходимостью рядов P и Q.

Признаки Даламбера и Коши.

Теорема 8 (признак Даламбера). Если

$$\forall k: \quad \frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1 \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1\right),$$

то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$$

сходится (расходится).

Доказательство:

Воспользуемся признаком сравнения (теорема 7). Из цепочки неравенств $p_{k+1} \leq q \cdot p_k \leq q \cdot q \cdot p_{k-1} \leq \ldots \leq q^k p_1$ и сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k p_1$$

заключаем, что ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$$
сходится.

Если
$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1,$$
то $p_{k+1} \geq p_k \geq \ldots \geq p_1 > 0$ и тем самым не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Теорема 8 доказана.

Следствие (признак Даламбера в предельной форме): если существует
$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = q < 1 \quad (> 1),$$
то ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$$
сходится (расходится). Доказательство провести самостоятельно.

Замечание 1: условие
$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1$$
в теореме 8 нельзя заменить условием
$$\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1,$$
которое выполняется, например, для рассмотренного выше расходящегося гармонического ряда.

Замечание 2: признак Даламбера в предельной форме не позволяет судить о сходимости и расходимости рядов в случае, когда
$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = 1.$$
В качестве примера приведем ряды
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$
первый из которых расходится, а второй —сходится (это будет доказано позднее).

<u>Теорема 9 (признак Коши).</u> Если $\forall k : \sqrt[k]{p_k} \le q < 1 \quad (\sqrt[k]{p_k} \ge 1)$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$$

сходится (расходится).

Доказательство:

Воспользуемся теоремой 7. Из неравенства $p_k \le q^k$ и сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k$$

вытекает, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$$

также сходится.

Если $\sqrt[k]{p_k} \ge 1$, то $p_k \ge 1$ и тем самым не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Теорема 9 доказана.

<u>Следствие (признак Коши в предельной форме):</u> если существует

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = q < 1 \quad (> 1),$$

то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$$

сходится (расходится). Доказательство провести самостоятельно.

<u>Замечание 1:</u> условие

$$\sqrt[k]{p_k} \le q < 1$$

в теореме 9 нельзя заменить условием

$$\sqrt[k]{p_k} < 1.$$

Пример: гармонический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

<u>Замечание 2:</u> если

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = 1,$$

то ряд может сходиться, а может и расходиться. Примеры:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Признак Коши имеет более широкую область применимости. Нетрудно доказать, что если

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \le q < 1$$

(т.е. "работает"признак Даламбера), то, начиная с некоторого номера

$$\sqrt[k]{p_k} \le q_1 < 1$$

(т.е. "работает"и признак Коши). Обратное не верно. Пример:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + 2}{2^k}.$$

Лекция 15

Числовые последовательности и ряды (продолжение).

Интегральный признак Коши-Маклорена.

Теорема 10. Пусть ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$$
является рядом с положительными членами и пусть существует функция $f(x)$, определенная при $x \geq 1$ и удовлетворяющая условиям:
1) $f(x) \geq 0$ при $x \geq 1$;
2) $f(x)$ не возрастает при $x \geq 1$;
3) $\forall k$: $f(k) = p_k$.

Тогда ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$$
сходится тогда и только тогда, когда существует
$$\lim_{n\to\infty} a_n, \quad \text{где} \quad a_n = \int_1^n f(x)dx.$$

Доказательство:

Очевидно, что
$$p_k \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx \leq p_{k-1}.$$
Просуммируем это неравенство по k от 2 до n:
$$p_2 + p_3 + \ldots + p_n \leq \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \ldots +$$
$$+ \int_{n-1}^{n} f(x)dx \leq p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1},$$
или
$$S_n - p_1 \leq a_n \leq S_{n-1}, \quad \text{где} \quad a_n = \int_1^n f(x)dx \quad \text{и} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} p_k.$$

Так как $f(x) \geq 0$, то $\{a_n\}$ —неубывающая последовательность. Для ее сходимости, т.е. для существования предела

$$\lim_{n\to\infty} a_n,$$

необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена. Для сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм была ограничена. Из полученного выше неравенства

$$S_n - p_1 \leq a_n \leq S_{n-1}$$

следует, что $\{S_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда ограничена $\{a_n\}$. Следовательно, $\{S_n\}$ сходится (а значит, сходится и наш ряд) тогда и только тогда, когда существует

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Теорема 10 полностью доказана.

Пример: рассмотрим при $\alpha > 1$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Введем функцию

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}.$$

Она будет положительной и убывающей при $x \geq 1$, причем $f(k) = 1/k^\alpha$. Поскольку

$$a_n = \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right|_1^n = \frac{n^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \to \frac{1}{\alpha-1} \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то, согласно теореме 10, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

сходится ($\alpha > 1$).

Еще один полезный признак сходимости для рядов с положительными членами —*признак Гаусса* —работает на сравнении рядов с обобщенным гармоническим рядом. Сформулируем его.

Пусть члены ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$$

удовлетворяют при $k \to \infty$ асимптотическому соотношению

$$\frac{p_k}{p_{k+1}} = \alpha + \frac{\beta}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right).$$

Тогда:

1) если $\alpha > 1$ ($\alpha < 1$), то ряд сходится (расходится);
2) если $\alpha = 1$ и $\beta > 1$ ($\beta < 1$), то ряд сходится (расходится);
3) если $\alpha = 1$ и $\beta = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

§6. Знакопеременные ряды.

Рассмотрим ряд A:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Будем считать, что в нем имеется бесконечно много положительных и бесконечно много отрицательных членов. В таком случае ряд A назовем *знакопеременным.*

Определение: ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (\text{ряд} \quad A)$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad (\text{ряд} \quad |A|).$$

Отметим, что при этом ряд A также сходится (это легко доказывается с помощью критерия Коши).

Пример: ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

является абсолютно сходящимся, т.к. сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Определение: ряд A называется *условно сходящимся*, если он сходится, а ряд $|A|$ расходится.

Пример: ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

является условно сходящимся. Докажем это.

Имеем:

$$S_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) > 0,$$

$$S_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2n} < 1.$$

Итак, последовательность $\{S_{2n}\}$ —ограниченная, поскольку для любого n выполнено неравенство $0 < S_{2n} < 1$. Кроме того, $\{S_{2n}\}$ —возрастающая последовательность. Следовательно, существует

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S,$$

а поскольку

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \to S \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то и

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

т.е. ряд сходится. Ряд из модулей членов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

расходится (это гармонический ряд). Следовательно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

сходится условно, что и требовалось доказать.

Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (\text{ряд} \quad A)$$

является знакопеременным. Обозначим через $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ положительные члены, выписанные в том порядке, в котором они стоят в ряде A, а через $-q_1, -q_2, \ldots, -q_n, \ldots$ —отрицательные члены ряда A. Образуем два ряда с положительными членами:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \quad (\text{ряд} \quad P) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k \quad (\text{ряд} \quad Q).$$

Теорема 11. 1) Если ряд A сходится абсолютно, то ряды P и Q сходятся, причем $S^A = S^P - S^Q$. 2) Если ряд A сходится условно, то ряды P и Q расходятся.

Доказательство:

1) Пусть ряд A сходится абсолютно, т.е. сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Тогда для любого n справедливо неравенство:

$$S_n^{|A|} = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = S^{|A|}.$$

Рассмотрим

$$S_n^A = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Обозначим через $S_{n_1}^P$ сумму членов ряда P, входящую в S_n^A, а через $S_{n_2}^Q$ — сумму членов ряда Q, входящую в S_n^A со знаком "минус":

$$S_{n_1}^P = \sum_{k=1}^{n_1} p_k, \quad S_{n_2}^Q = \sum_{k=1}^{n_2} q_k, \quad n_1 + n_2 = n.$$

Очевидно,что

$$S_n^A = S_{n_1}^P - S_{n_2}^Q,$$
$$S_n^{|A|} = S_{n_1}^P + S_{n_2}^Q.$$

Из последнего неравенства и из неравенства $S_n^{|A|} \leq S^{|A|}$ получаем $S_{n_1}^P \leq S^{|A|}$, $S_{n_2}^Q \leq S^{|A|}$, откуда вытекает сходимость рядов P и Q: $S_{n_1}^P \to S^P$ и $S_{n_2}^Q \to S^Q$ при $n_1, n_2 \to \infty$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве $S_n^A = S_{n_1}^P - S_{n_2}^Q$, получим $S^A = S^P - S^Q$. Первая часть теоремы доказана.

2) Пусть ряд A сходится условно. Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

расходится. Докажем, что ряды P и Q также расходятся. В самом деле, если бы они сходились, т.е. существовали бы пределы

$$\lim_{n_1 \to \infty} S_{n_1}^P \quad \text{и} \quad \lim_{n_2 \to \infty} S_{n_2}^Q,$$

то в силу равенства $S_n^{|A|} = S_{n_1}^P + S_{n_2}^Q$ существовал бы и предел

$$\lim_{n \to \infty} S_n^{|A|},$$

т.е. сходился бы ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|,$$

что противоречит условию. Следовательно, по крайней мере один из рядов P и Q расходится. Если бы один из них сходился, а другой расходился, то в силу равенства $S_n^A = S_{n_1}^P - S_{n_2}^Q$ расходился бы ряд A, а он по условию сходится. Итак, ряды P и Q расходятся. Теорема 11 полностью доказана.

Замечание: если ряд A сходится условно, то его положительная часть (ряд P) и отрицательная часть (ряд Q со знаком "минус") являются бесконечно большими. Другими словами, получается как бы "неопределенность типа $\infty - \infty$". Любой условно сходящийся ряд обладает тем свойством, что для любого наперед заданного числа S можно переставить члены ряда так, что новый ряд (полученный после перестановки членов) будет иметь сумму, равную S. Об этом —подробнее ниже.

Признак Дирихле-Абеля.

Этот признак относится к рядам вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k.$$

Положим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Теорема 12 (признак Дирихле-Абеля). Пусть выполнены следующие условия:

1) последовательность $\{b_n\}$ —невозрастающая и бесконечно малая, т.е. $b_n \to 0$ при $n \to \infty$;

2) последовательность $\{S_n\}$ ограничена, т.е. существует число $M > 0$ такое, что для любого n выполнено неравенство $|S_n| \leq M$.

Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

сходится.

Доказательство:

Для доказательства сходимости данного ряда воспользуемся критерием Коши. Рассмотрим "отрезок"ряда от $k = n+1$ до $k = n+p$ (именно этот "отрезок"фигурирует в критерии Коши):

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \big(S_k - S_{k-1}\big) = \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k S_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k S_{k-1} =$$

$$= \sum_{k=n+2}^{n+p+1} b_{k-1} S_{k-1} - \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k S_{k-1} = b_{n+p} S_{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p} b_{k-1} S_{k-1} - b_n S_n -$$

$$- \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k S_{k-1} = b_{n+p} S_{n+p} - b_n S_n + \sum_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1} \big(b_{k-1} - b_k\big).$$

Отметим, что в силу условия 1) $b_k \geq 0$, $b_{k-1} - b_k \geq 0$.

Зададим теперь произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $b_n \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\exists N, \quad \forall n > N: \quad 0 \leq b_n < \frac{\varepsilon}{2M},$$

где M —число из условия 2) теоремы. Тем самым $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$, используя равенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = b_{n+p} S_{n+p} - b_n S_n + \sum_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1} \big(b_{k-1} - b_k\big),$$

получаем

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \Big| \leq b_{n+p} M + b_n M + M \big(b_n - b_{n+1} + b_{n+1} - b_{n+2} + \ldots + b_{n+p-1} - b_{n+p}\big) =$$

$$= 2b_n \cdot M < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

По критерию Коши ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

сходится. Теорема 12 доказана.

Пример: исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha},$$

где x —любое фиксированное число и $\alpha > 0$ (если $\alpha \leq 0$, то общий член ряда не стремится к нулю и ряд заведомо расходится).

Положим $a_k = \sin kx$, $b_k = 1/k^\alpha$ и применим признак Дирихле-Абеля. Последовательность $\{b_k\}$ удовлетворяет условию 1) теоремы 12. Проверим выполнение условия 2):

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{5x}{2} - \cos\frac{7x}{2} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \cos(n - \frac{1}{2})x - \cos(n + \frac{1}{2})x \right) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |S_n| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} = M \quad (\text{если} \quad x \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}).$$

По признаку Дирихле-Абеля ряд сходится при $x \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$. Но если $x = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$, то все члены ряда равны нулю и ряд также сходится. Таким образом, можно заключить, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

сходится при любом x.

Если $\alpha > 1$, то ряд сходится абсолютно, т.к.

$$\left| \frac{\sin kx}{k^\alpha} \right| \leq \frac{1}{k^\alpha},$$

а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

сходится при $\alpha > 1$.

Если же $0 < \alpha \leq 1$, то ряд сходится условно, поскольку ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin kx}{k^\alpha} \right|$$

расходится при $0 < \alpha \leq 1$. В самом деле,

$$\frac{|\sin kx|}{k^\alpha} \geq \frac{\sin^2 kx}{k^\alpha} = \frac{1 - \cos 2kx}{2k^\alpha}.$$

Но при $0 < \alpha \leq 1$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2kx}{2k^\alpha}$$

расходится, т.к. его частичная сумма

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos 2kx}{k^\alpha} \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Здесь мы воспользовались тем, что при $0 < \alpha \leq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

а последовательность

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos 2kx}{k^\alpha}$$

сходится к некоторому числу при $n \to \infty$ (доказательство этого факта аналогично доказательству сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha} \quad (\alpha > 0),$$

которое мы провели выше.)

<u>Следствие из теоремы 12:</u> рассмотрим ряд

$$p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} p_k,$$

где $p_k > 0$. Он называется *знакочередующимся*. Пусть $\{p_k\} \downarrow 0$ (это означает, что $p_{k+1} \leq p_k$ и $p_k \to 0$ при $k \to \infty$). Тогда данный ряд называется *рядом Лейбница* .

Утверждение: ряд Лейбница сходится.

Доказательство:

Положим $a_k = (-1)^{k-1}$, $b_k = p_k$. Тогда $\{b_n\} \downarrow 0$ и последовательность

$$\{S_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\} = 1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots$$

является ограниченной. По теореме 12 ряд сходится, что и требовалось доказать.

Пример: рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Он является рядом Лейбница, и, следовательно, сходится (ранее мы доказали это, не опираясь на теорему 12). Позднее мы покажем, что его сумма равна $\ln 2$.

Задание на дом: пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} p_k = S$$

является рядом Лейбница. Доказать следующие неравенства:

1)

$$S \leq p_1;$$

2)

$$|S - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} p_k| \leq p_{n+1};$$

3)

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad S_2 \leq S_4 \leq \ldots \leq S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1} \leq \ldots \leq S_3 \leq S_1.$$

О сочетательном и перестановочном свойствах рядов.

Конечные суммы обладают сочетательным и перестановочным свойствами. Обладают ли этими свойствами сходящиеся ряды?

Рассмотрим сначала сочетательное свойство. Пусть дан некоторый ряд A:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1} + a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2} + \ldots + a_{n_k} + \ldots$$

Введем обозначения $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}) = b_1$, $(a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) = b_2$, $\ldots, (\ldots + \ldots + a_{n_k}) = b_k$ и рассмотрим ряд B:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Теорема 13. Если ряд A сходится, то ряд B также сходится и их суммы равны.

Доказательство:

Частичная сумма ряда B является также частичной суммой ряда A:

$$S_k^B = b_1 + b_2 + \ldots + b_k = \sum_{i=1}^{n_k} a_i = S_{n_k}^A.$$

Поэтому последовательность $\{S_k^B\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{S_n^A\}$ и, следовательно, $\{S_k^B\}$ сходится к тому же числу, что и $\{S_n^A\}$, т.е. сумма ряда B равна сумме ряда A. Теорема доказана.

Лекция 16

Числовые последовательности и ряды (продолжение).

Перестановочное свойство.

Рассмотрим ряд A
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$
После перестановки его членов получается новый ряд A':
$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k.$$
Ясно, что $a'_k = a_{n_k}$ и также $a_k = a'_{m_k}$, где n_k и m_k —какие-то номера.

Теорема 14. Если ряд A сходится абсолютно, то ряд A' также сходится абсолютно и их суммы равны: $S^A = S^{A'}$.

Доказательство:

а) сначала разберем случай, когда члены A неотрицательны: $a_k \geq 0$. Тогда
$$S_n^A = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S^A.$$
Рассмотрим частичную сумму ряда A':
$$S_k^{A'} = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_k = a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_k} \leq S^A.$$
Итак, последовательность частичных сумм ряда A' ограничена, поэтому этот ряд сходится. При этом
$$S^{A'} = \lim_{k\to\infty} S_k^{A'} \leq S^A.$$
Поскольку ряд A можно рассматривать как ряд, полученный перестановкой членов ряда A', то $S^A \leq S^{A'}$. Отсюда $S^A = S^{A'}$.

б) теперь обратимся к общему случаю, когда члены ряда A являются числами произвольного знака. По условию ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

сходится. По доказанному в пункте а) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a'_k|,$$

полученный из ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

перестановкой членов, также сходится. Это означает, что ряд A', полученный из ряда A перестановкой членов, сходится абсолютно.

По теореме 11 лекции 15 имеем: $S^A = S^P - S^Q$, $S^{A'} = S^{P'} - S^{Q'}$ (смысл обозначений такой же, как и в теореме 11). Так как ряд P' получается перестановкой членов ряда P, а ряд Q' —перестановкой членов ряда Q, то, по доказанному в пункте а), $S^{P'} = S^P$ и $S^{Q'} = S^Q$. Поэтому $S^{A'} = S^A$. Теорема 14 полностью доказана.

Если ряд A сходится условно, то перестановочное свойство не имеет места. Более того, справедливо следующее утверждение.

Теорема 15 (Римана). Если ряд A сходится условно, то для любого числа S можно так переставить члены ряда A, что сумма полученного ряда A' будет равна S.

Доказательство:

Ряду A соответствуют два ряда (см. теорему 11 лекции 15) —ряд P

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$$

и ряд Q

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k,$$

причем, как было показано, эти ряды являются расходящимися. Пусть (для определенности) $S > 0$. Покажем, как можно переставить члены ряда A так, чтобы сумма полученного ряда A' равнялась S.

Сначала будем брать члены ряда P (в порядке их следования) до тех пор, пока не получится сумма, большая S:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1-1} + p_{n_1} > S, \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1-1} \le S.$$

Затем будем добавлять члены ряда Q (со знаком "минус") до тех пор, пока не получится сумма, меньшая S:

$$p_1 + \ldots + p_{n_1} - q_1 - \ldots - q_{n_2-1} - q_{n_2} < S, \quad p_1 + \ldots + p_{n_1} - q_1 - \ldots - q_{n_2-1} \ge S.$$

Потом снова будем добавлять члены ряда P, и так далее. В результате получится ряд A', частичные суммы S'_n которого "колеблются"около числа S, причем "амплитуда"этих "колебаний"стремится к нулю при $n \to \infty$, поскольку $p_n \to 0$ и $q_n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, ряд A' сходится к числу S. Теорема Римана доказана.

§7. Второе определение предела функции.

Пусть функция $f(x)$ определена на X и a —предельная точка множества X, т.е. в любой ε-окрестности точки a содержатся точки из X, отличные от a.

Отметим, что понятия *предельной точки числового множества* и *предельной точки числовой последовательности* —различные понятия. Поясняющий пример: рассмотрим множество $X = \{1; 2\}$ и последовательность $\{x_n\} = 1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2, \ldots$. У множества X, состоящего из двух чисел, нет предельных точек, тогда как у последовательности $\{x_n\}$, очевидно, их две: $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$.

Определение 1 (по Коши): число b называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to a$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, такое, что $\forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\}$: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Определение 2 (по Гейне): число b называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to a$, если для любой последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, сходящейся к a и такой, что $x_n \neq a$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Задание: сформулировать отрицание определения предела функции по Гейне, т.е. сформулировать определение того, что

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq b.$$

Теорема 16. Определения 1 и 2 эквивалентны.

Доказательство:

1) пусть

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \underline{\text{по Коши}}.$$

Требуется доказать, что

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \underline{\text{по Гейне}},$$

то есть

$$\forall \{x_n\} \to a (x_n \neq a) : \{f(x_n)\} \to b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N, \forall n > N : |f(x_n) - b| < \varepsilon.$$