Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 1

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1 - x^2 + 3x^3 + 2x^4 + 6x^5 = 0 \\ 2x^1 + x^2 + 2x^4 + 11x^5 = 0 \\ x^1 + 2x^2 - 3x^3 + 3x^4 + 11x^5 = 0 \\ -2x^1 + x^2 - 4x^3 - x^4 - 7x^5 = 0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -4 & -1 & -4 & -11 & -14 & -3 \\ -1 & -4 & -4 & 7 & -11 & -6 \\ -2 & -2 & 1 & 11 & -10 & 9 \\ -4 & 1 & 0 & -9 & -10 & 7 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -11 \\ -12 \\ 8 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} -22 \\ -24 \\ 16 \\ -14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = -7e_2 - 2e_3$, $f_2 = -e_1 + 4e_2 + e_3$, $f_3 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 9(x^1)^2 - 18x^1x^2 - 18x^1x^3 + 18(x^2)^2 + 14(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $2x + 4y - 3z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/1 = y/2 = z/3$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 2

---

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1 - 2x^2 + 5x^3 + x^4 + 3x^5 = 0 \\ x^2 - 2x^3 + x^4 + 3x^5 = 0 \\ 2x^1 + x^2 + 3x^4 + 13x^5 = 0 \\ -x^1 + 2x^2 - 5x^3 + x^4 + x^5 = 0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 1 & 5 & 4 & 35 & -17 \\ 1 & -2 & -4 & 14 & -18 & 32 \\ 5 & -4 & -3 & 35 & -4 & 51 \\ -1 & -2 & -2 & 4 & -18 & 14 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -45 \\ -29 \\ 7 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 23 \\ 33 \\ -10 \\ 22 \\ -38 \end{pmatrix}.$$

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = 3e_1 - 8e_2 - 2e_3$, $f_2 = -3e_1 + e_2$, $f_3 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = (x^1)^2 - 6x^1x^2 - 6x^1x^3 + 48x^2x^3 - 20(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -8 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $2x + 4y - 5z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/1 = y/2 = z/-3$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 3

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1 - x^2 + 3x^3 + 3x^4 + 8x^5 = 0 \\ 3x^1 + x^2 + x^3 + 3x^4 + 16x^5 = 0 \\ x^1 + 3x^2 - 5x^3 + 4x^4 + 14x^5 = 0 \\ -3x^1 + x^2 - 5x^3 - 2x^4 - 12x^5 = 0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -2 & 1 & -4 & 13 & 1 & 28 \\ 1 & -1 & 0 & -7 & -3 & -3 \\ -4 & 0 & -5 & 13 & 3 & 45 \\ -3 & 4 & 3 & 23 & 13 & -8 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 3 \\ 13 \\ -6 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -16 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = 5e_2 - e_3$, $f_2 = -e_1 + 3e_2 - e_3$, $f_3 = e_1 - 2e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 + 4x^1x^3 - 7(x^2)^2 + 34x^2x^3 - 24(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 8 & 10 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -8 & 9 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $x + 2y - z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/1 = y/2 = z/4$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 4

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1 - 3x^2 + 7x^3 + x^4 + 2x^5 = 0 \\ -x^1 + x^2 - 3x^3 + x^4 = 0 \\ 3x^1 + x^2 + x^3 + 4x^4 + 18x^5 = 0 \\ -x^1 + 3x^2 - 7x^3 + 2x^4 + 4x^5 = 0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 2 & 0 & 9 & -13 & -9 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 6 & 11 & -1 \\ 4 & -4 & -3 & -21 & 51 & 23 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \\ -6 \\ -14 \\ -4 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -27 \\ 15 \\ -14 \end{pmatrix},\ A_6 = \begin{pmatrix} -18 \\ 10 \\ -11 \\ 20 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ -13 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = 4e_1 - 4e_2 + e_3$, $f_2 = -e_1 + 4e_2 - 3e_3$, $f_3 = -e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 - 4x^1x^3 + 25(x^2)^2 - 26x^2x^3 + (x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} -12 & -8 & 3 \\ 8 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -4 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $x + 5y - 5z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/1 = y/2 = z/-4$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 5

---

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1 - 2x^2 + 5x^3 + 3x^4 + 7x^5 = 0 \\ 2x^1 + x^2 + 3x^4 + 13x^5 = 0 \\ 2x^1 + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 + 19x^5 = 0 \\ -3x^1 + 2x^2 - 7x^3 - x^4 - 9x^5 = 0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & -3 & -6 & -37 \\ 0 & 2 & 5 & -21 & -17 & -18 \\ -2 & -4 & -5 & 11 & 1 & 26 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:
$A_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ -10 \\ -13 \\ -8 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 18 \\ -15 \\ -30 \\ 22 \\ 37 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} -4 \\ 20 \\ 13 \\ 36 \\ 16 \end{pmatrix}$.

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = -5e_1 + 9e_2 + 3e_3$, $f_2 = -8e_1 + 7e_2 + 3e_3$, $f_3 = -3e_1 + 2e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 + 4x^1x^3 + 6x^2x^3 - 19(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $2x + y - z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/1 = y/2 = z/5$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 6

---

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1 - 3x^2 + 5x^3 + 2x^4 + 13x^5 = 0 \\ x^2 - x^3 + 2x^4 + 4x^5 = 0 \\ 3x^1 + 2x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 14x^5 = 0 \\ -2x^1 + 3x^2 - 7x^3 + x^4 - 5x^5 = 0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -5 & 0 & -2 & 5 & 4 \\ -5 & 4 & 4 & -32 & 29 & -13 \\ 0 & 4 & 5 & -17 & 8 & -33 \\ -4 & 2 & 5 & -37 & 34 & -17 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 9 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 15 \\ -15 \\ 5 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 14 \\ -18 \\ -18 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = -2e_1 - e_2$, $f_2 = 2e_1 - 2e_2 - e_3$, $f_3 = e_1 + 3e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 + 8x^1x^3 + 5(x^2)^2 - 8x^2x^3 + 3(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -2 \\ -7 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $5x + y - 3z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/1 = y/2 = z/-5$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 7

---

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1 - x^2 + 3x^3 + 2x^4 + 9x^5 = 0 \\ 2x^1 + x^2 + 3x^3 + 2x^4 + 6x^5 = 0 \\ x^1 + 2x^2 + 3x^4 + 6x^5 = 0 \\ -2x^1 + x^2 - 5x^3 - x^4 - 7x^5 = 0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -4 & 0 & 3 & 3 & -14 & -13 \\ 0 & -1 & -3 & 9 & 7 & 1 \\ 3 & -3 & -2 & -3 & 13 & 22 \\ 3 & 3 & 0 & -9 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:
$A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -31 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ 22 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$.

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -12 \\ 10 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_3 = 2e_1 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 - 8x^1x^3 + 13(x^2)^2 + 8x^2x^3 - 4(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & -5 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $3x + 4y - 3z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/2 = y/1 = z/1$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 8

---

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\left\{\begin{aligned} x^1 - x^2 + 3x^3 + 3x^4 + 12x^5 &= 0\\ 3x^1 + x^2 + 5x^3 + 3x^4 + 10x^5 &= 0\\ x^1 + 3x^2 - x^3 + 4x^4 + 7x^5 &= 0\\ -3x^1 + x^2 - 7x^3 - 2x^4 - 11x^5 &= 0 \end{aligned}\right.$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 4 & -2 & 3 & 9 & -18 & 3\\ -2 & 1 & -1 & -7 & 9 & -4\\ 3 & -1 & -2 & 27 & -14 & 24\\ 5 & 4 & -4 & 37 & -29 & 49 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4\\ -2\\ 2\\ -3\\ -3 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -2\\ 5\\ 3\\ -1\\ 4 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -24\\ 0\\ 16\\ -17\\ -7 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0\\ -4\\ -3\\ 3\\ -5 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} -16\\ 8\\ 20\\ -24\\ 8 \end{pmatrix},\ A_6 = \begin{pmatrix} 16\\ -36\\ -31\\ 25\\ -35 \end{pmatrix}.$$

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 4\\ -2\\ 2\\ -1 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = 4e_1 - e_2 - 3e_3$, $f_2 = 6e_1 - 2e_2 - 3e_3$, $f_3 = -3e_1 + e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -1\\ -6\\ -2 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -5\\ 0\\ 4 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 - 8x^1x^3 - 7(x^2)^2 + 36x^2x^3 - 9(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0\\ -7 & -3 & 2\\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3\\ 2 & -1 & 1\\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1\\ -2 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $5x + y - 4z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/2 = y/1 = z/-1$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 9

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\left\{\begin{aligned} x^1-3x^2+5x^3+x^4+10x^5&=0\\ -x^1+x^2-3x^3+x^4&=0\\ 3x^1+x^2+5x^3+4x^4+13x^5&=0\\ -x^1+3x^2-5x^3+2x^4-x^5&=0\end{aligned}\right.$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & -2 & 2 & -2 & 0 & -8\\ -2 & 1 & 4 & 11 & -22 & -6\\ 2 & 4 & -1 & -6 & -10 & 10\\ -5 & 4 & -5 & 29 & -1 & 18\end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:

$$A_1=\begin{pmatrix}-4\\2\\-5\\3\\-4\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}4\\-5\\5\\3\\5\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}-24\\24\\-30\\-6\\-28\end{pmatrix},\ A_4=\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\\-5\\-3\end{pmatrix},\ A_5=\begin{pmatrix}-18\\9\\-22\\7\\-19\end{pmatrix},\ A_6=\begin{pmatrix}-6\\0\\-5\\-22\\-10\end{pmatrix}.$$

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1=\begin{pmatrix}-5\\-10\\3\\-1\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}4\\7\\-2\\1\end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1=-6e_1+3e_2-e_3$, $f_2=-7e_1+e_2+2e_3$, $f_3=-2e_1+e_3$; $X_e=\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$, $Y_f=\begin{pmatrix}-6\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1,x^2,x^3\right)=(x^1)^2-6x^1x^2-2x^1x^3+8(x^2)^2+12x^2x^3-8(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X=\begin{pmatrix}-7&-2&-2\\7&1&2\\3&0&1\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}-2&-2&-4\\2&1&3\\3&0&3\end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A=\begin{pmatrix}5&4&0\\-1&-2&2\\2&1&-3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-3&-3\\2&-5&-5\\1&-2&-1\end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $x+4y-z=0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/2=y/1=z/2$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 10

---

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1 - 2x^2 + 4x^3 + x^4 + 8x^5 = 0 \\ x^2 - x^3 + x^4 + x^5 = 0 \\ 2x^1 + x^2 + 3x^3 + 3x^4 + 9x^5 = 0 \\ -x^1 + 2x^2 - 4x^3 + x^4 - 2x^5 = 0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -3 & -1 & 5 & 29 & 12 & 20 \\ -1 & 5 & -3 & 7 & -22 & 2 \\ 5 & -3 & 1 & -25 & 8 & -24 \\ 5 & -5 & 4 & -19 & 19 & -21 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 27 \\ -27 \\ -6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} -10 \\ -13 \\ -14 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} -23 \\ -29 \\ -40 \\ 26 \\ -35 \end{pmatrix}.$$

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = 5e_1 + e_2 + 2e_3$, $f_2 = -11e_1 + e_2 - 3e_3$, $f_3 = 3e_1 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = (x^1)^2 - 6x^1x^2 - 4x^1x^3 + 10(x^2)^2 + 10x^2x^3 + 4(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -1 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $3x + 3y - z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/2 = y/1 = z/-2$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 11

---

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1 - x^2 + x^3 + 2x^4 - 9x^5 = 0 \\ 2x^1 + x^2 + 5x^3 + 2x^4 - 6x^5 = 0 \\ x^1 + 2x^2 + 4x^3 + 3x^4 - 6x^5 = 0 \\ -2x^1 + x^2 - 3x^3 - x^4 + 7x^5 = 0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 5 & 2 & 5 & -19 & -44 & 41 \\ 2 & -3 & -2 & -8 & 2 & -11 \\ 5 & -2 & -5 & -31 & -6 & -11 \\ -2 & 4 & -5 & -8 & 17 & -14 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 8 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ -3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 20 \\ 35 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = 7e_2 + 2e_3$, $f_2 = -e_1 + 7e_2 + 2e_3$, $f_3 = 3e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 9(x^1)^2 - 18x^1x^2 + 6x^1x^3 + 8(x^2)^2 + 2x^2x^3 - 16(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -8 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 9 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $5x + 4y - 5z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/2 = y/1 = z/3$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 12

---

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^4 - 8x^5 = 0 \\ x^2 + x^3 + x^4 - x^5 = 0 \\ 2x^1 + x^2 + 5x^3 + 3x^4 - 9x^5 = 0 \\ -x^1 + 2x^2 + x^4 + 2x^5 = 0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -4 & 3 & 0 & 9 & -32 & 26 \\ 3 & 3 & -2 & -22 & 13 & -11 \\ 0 & -2 & -4 & -18 & 28 & -8 \\ -2 & 5 & 2 & 11 & -40 & 22 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:
$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 27 \\ 18 \\ 15 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 14 \\ 19 \\ 4 \\ -3 \\ 17 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} -17 \\ -1 \\ 11 \\ 6 \\ -16 \end{pmatrix}$.

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = e_1 + 4e_2 + 2e_3$, $f_2 = 9e_1 - e_2 - 2e_3$, $f_3 = -3e_1 + e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = (x^1)^2 - 6x^1x^2 - 4x^1x^3 + 8(x^2)^2 + 20x^2x^3 - 12(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -8 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $x + 3y - 4z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/2 = y/1 = z/-3$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 13

---

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1 - x^2 + x^3 + 3x^4 - 12x^5 = 0 \\ 3x^1 + x^2 + 7x^3 + 3x^4 - 10x^5 = 0 \\ x^1 + 3x^2 + 5x^3 + 4x^4 - 7x^5 = 0 \\ -3x^1 + x^2 - 5x^3 - 2x^4 + 11x^5 = 0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 5 & 4 & 1 & 21 & 2 \\ 5 & -5 & 4 & -26 & 0 & 57 \\ 4 & 4 & -1 & 20 & 24 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -29 & -9 & 42 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 19 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ -4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix},\ A_6 = \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ -6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} -12 \\ -10 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = 8e_1 - e_2 - e_3$, $f_2 = -5e_1 - 5e_2 + 3e_3$, $f_3 = -e_1 - 2e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 - 4x^1x^3 + 18(x^2)^2 - 24x^2x^3 + 22(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 11 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $3x + 3y - 2z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/1 = z/1$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 14

---

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1 - 3x^2 - x^3 + x^4 - 10x^5 = 0 \\ -x^1 + x^2 - x^3 + x^4 = 0 \\ 3x^1 + x^2 + 7x^3 + 4x^4 - 13x^5 = 0 \\ -x^1 + 3x^2 + x^3 + 2x^4 + x^5 = 0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -3 & 4 & -2 & 21 & 12 & 29 \\ 4 & 2 & -2 & -16 & 0 & 12 \\ -2 & -2 & -5 & 13 & 31 & 7 \\ -2 & -1 & 5 & 4 & -20 & -18 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:
$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 23 \\ -13 \\ 10 \\ -24 \\ 27 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} -11 \\ 20 \\ -10 \\ 30 \\ -24 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ -8 \\ 8 \\ -19 \end{pmatrix}$.

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = -5e_1 + e_3$, $f_2 = 2e_2 + e_3$, $f_3 = -3e_1 + e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 + 4x^1x^3 + 8(x^2)^2 - 4x^2x^3 - 16(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -3 & -5 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $3x + 3y + z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/1 = z/-1$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 15

---

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1-2x^2+3x^4-14x^5=0 \\ 2x^1+x^2+5x^3+3x^4-9x^5=0 \\ 2x^1+3x^2+7x^3+5x^4-11x^5=0 \\ -3x^1+2x^2-4x^3-x^4+10x^5=0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -5 & 1 & 4 & 25 & 11 & -16 \\ 1 & 3 & 0 & 7 & -7 & -4 \\ 4 & 0 & -2 & -14 & -8 & 10 \\ 5 & 0 & -5 & -25 & -15 & 15 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:
$A_1=\begin{pmatrix} -5\\-3\\2\\5\\-4 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} -3\\2\\-3\\1\\-4 \end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix} 25\\-4\\11\\-15\\28 \end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix} -1\\-4\\2\\-2\\-3 \end{pmatrix}$, $A_5=\begin{pmatrix} -19\\-8\\6\\22\\-13 \end{pmatrix}$, $A_6=\begin{pmatrix} -14\\-27\\24\\19\\-7 \end{pmatrix}$.

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1=\begin{pmatrix} 1\\6\\1\\1 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} 12\\-3\\-3\\2 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1,e_2,e_3 («старый») и f_1,f_2,f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x},\mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1=-8e_1+5e_2+2e_3$, $f_2=4e_2+e_3$, $f_3=-3e_1+3e_2+e_3$;
$X_e=\begin{pmatrix} 2\\-1\\4 \end{pmatrix}$, $Y_f=\begin{pmatrix} 4\\-5\\2 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1,x^2,x^3\right)=4(x^1)^2-12x^1x^2-8x^1x^3-7(x^2)^2+44x^2x^3-12(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X=\begin{pmatrix} 10&3&0\\-3&-5&3\\-2&-2&1 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 3&0&3\\3&3&6\\-2&-2&-4 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A=\begin{pmatrix} -6&2&2\\0&-4&4\\-3&3&-3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1&3&-3\\-3&-8&10\\-1&0&7 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $x+3y-3z=0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3=y/-1=z/1$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 16

---

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1 - x^2 - 4x^3 + 2x^4 + x^5 = 0 \\ 2x^1 + x^2 + x^3 + 2x^4 + 6x^5 = 0 \\ x^1 + 2x^2 + 5x^3 + 3x^4 + 8x^5 = 0 \\ -2x^1 + x^2 + 5x^3 - x^4 - x^5 = 0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & -1 & 3 & -5 & 6 & -1 \\ -1 & 5 & -2 & 14 & -15 & -10 \\ 3 & -2 & -3 & 1 & 5 & 5 \\ -1 & 5 & -3 & 13 & -18 & -7 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:
$A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -13 \\ -22 \\ -10 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} -26 \\ -27 \\ -23 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = -2e_1 + 3e_2 - e_3$, $f_2 = 4e_1 - 5e_2 + 2e_3$, $f_3 = 3e_1 - 3e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 - 12x^1x^3 + 10(x^2)^2 + 10x^2x^3 + 16(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 6 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $5x + 3y - z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/2 = z/1$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 17

---

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1-2x^2-7x^3+x^4-2x^5=0 \\ x^2+3x^3+x^4+3x^5=0 \\ 2x^1+x^2+x^3+3x^4+7x^5=0 \\ -x^1+2x^2+7x^3+x^4+4x^5=0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -4 & -5 & 4 & 24 & 24 & -15 \\ -5 & 0 & -1 & -1 & -19 & -19 \\ 4 & -1 & 3 & 7 & 28 & 14 \\ 1 & -5 & 1 & 21 & 27 & 8 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:
$A_1=\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 0 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $A_5=\begin{pmatrix} 19 \\ -28 \\ 5 \\ 26 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A_6=\begin{pmatrix} 27 \\ -32 \\ 5 \\ 28 \\ -7 \end{pmatrix}$.

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1=\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1=-e_1+2e_2-2e_3$, $f_2=5e_1+3e_2-e_3$, $f_3=-2e_1-2e_2+e_3$; $X_e=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $Y_f=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1,x^2,x^3\right)=4(x^1)^2-12x^1x^2+8x^1x^3-7(x^2)^2+4x^2x^3-(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -6 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $x+y-2z=0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3=y/2=z/-1$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 18

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1 - x^2 - 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 = 0 \\ 3x^1 + x^2 + 3x^4 + 8x^5 = 0 \\ x^1 + 3x^2 + 8x^3 + 4x^4 + 11x^5 = 0 \\ -3x^1 + x^2 + 6x^3 - 2x^4 - 3x^5 = 0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & -1 & 4 & 17 & -21 & -17 \\ -1 & 4 & -4 & -23 & 31 & 25 \\ 4 & -4 & 3 & 27 & -24 & -24 \\ 1 & -5 & 2 & 13 & -27 & -19 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:
$A_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 27 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 11 \\ 35 \\ -16 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} -12 \\ 18 \\ 2 \\ 31 \\ -26 \end{pmatrix}$.

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = -4e_1 - e_3$, $f_2 = -5e_1 - e_3$, $f_3 = 2e_1 + e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 9(x^1)^2 - 18x^1x^2 + 6x^1x^3 - 7(x^2)^2 + 18x^2x^3 - 8(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ -3 & -5 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $4x + 2y - 5z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/-2 = z/1$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 19

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1 - 3x^2 - 10x^3 + x^4 - 4x^5 = 0 \\ -x^1 + x^2 + 4x^3 + x^4 + 2x^5 = 0 \\ 3x^1 + x^2 + 4x^4 + 9x^5 = 0 \\ -x^1 + 3x^2 + 10x^3 + 2x^4 + 7x^5 = 0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -4 & 1 & 1 & 7 & 19 & -25 \\ 1 & -3 & 4 & -10 & -30 & -15 \\ 1 & 4 & 5 & 11 & -13 & -20 \\ 4 & 0 & -3 & -4 & -8 & 35 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -11 \\ 23 \\ -16 \\ 24 \\ -20 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 22 \\ -22 \\ 8 \\ -18 \\ 14 \end{pmatrix},\ A_6 = \begin{pmatrix} -32 \\ 29 \\ -40 \\ 24 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3$, $f_2 = -2e_1 - 5e_2 + 3e_3$, $f_3 = -e_1 - 2e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},\ Y_f = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 9(x^1)^2 - 18x^1x^2 + 6x^1x^3 + 13(x^2)^2 - 26x^2x^3 + 25(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -5 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 7 & -3 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $5x + 2y - z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/-2 = z/-1$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 20

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1 - 2x^2 - 7x^3 + 3x^4 = 0 \\ 2x^1 + x^2 + x^3 + 3x^4 + 7x^5 = 0 \\ 2x^1 + 3x^2 + 7x^3 + 5x^4 + 13x^5 = 0 \\ -3x^1 + 2x^2 + 9x^3 - x^4 = 0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 3 & 0 & 2 & 14 \\ -1 & 5 & 4 & -7 & 27 & 24 \\ 3 & 4 & -1 & -33 & 25 & 10 \\ -3 & -5 & -4 & 27 & -35 & -32 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 17 \\ -18 \\ 7 \\ 14 \\ -17 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \\ -24 \\ 16 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -13 \\ -9 \\ 52 \\ -43 \end{pmatrix}.$$

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -12 \\ 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = 4e_1 + 7e_2 - 3e_3$, $f_2 = -8e_2 + 3e_3$, $f_3 = e_1 - 3e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 9(x^1)^2 - 18x^1x^2 + 12x^1x^3 - 6x^2x^3 - (x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} -9 & -7 & 3 \\ 10 & 7 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $3x + 4y - 5z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/3 = z/1$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 21

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1 - x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 = 0 \\ 2x^1 + x^2 - 5x^3 + 2x^4 + 7x^5 = 0 \\ x^1 + 2x^2 - 7x^3 + 3x^4 + 7x^5 = 0 \\ -2x^1 + x^2 - x^3 - x^4 - 4x^5 = 0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 3 & 4 & -5 & 42 & -15 \\ 3 & 5 & -1 & -1 & 30 & -16 \\ 4 & -1 & 4 & 1 & 36 & -19 \\ 5 & -4 & -2 & 11 & -1 & -14 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:
$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} -18 \\ 29 \\ -21 \\ 18 \\ -30 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 9 \\ -38 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = e_1 - 2e_2$, $f_2 = -e_1 + e_3$, $f_3 = -e_1 - e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 9(x^1)^2 - 18x^1x^2 + 12x^1x^3 + 6x^2x^3 - 5(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -8 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -5 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 7 & -5 \\ -2 & 9 & -10 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $5x + 2y - 4z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/3 = z/-1$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 22

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1 - 2x^2 + 5x^3 + x^4 + x^5 = 0 \\ x^2 - 3x^3 + x^4 + 2x^5 = 0 \\ 2x^1 + x^2 - 5x^3 + 3x^4 + 8x^5 = 0 \\ -x^1 + 2x^2 - 5x^3 + x^4 + x^5 = 0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 5 & 2 & 13 & 1 & -23 \\ 5 & 1 & -4 & 25 & -14 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & -8 & -22 & 22 \\ -4 & -1 & -1 & -8 & 19 & 1 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\ A_6 = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -12 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = e_1 - 3e_3$, $f_2 = 2e_1 + 2e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 + e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 4(x^1)^2 - 12x^1x^2 + 8x^1x^3 + 25(x^2)^2 - 28x^2x^3 + 4(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -6 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -3 & -3 & -6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $x + 4y + z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/3 = z/2$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 23

---

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1 - x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 = 0 \\ 3x^1 + x^2 - 6x^3 + 3x^4 + 10x^5 = 0 \\ x^1 + 3x^2 - 10x^3 + 4x^4 + 9x^5 = 0 \\ -3x^1 + x^2 - 2x^4 - 7x^5 = 0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -5 & 2 & 0 & -17 & 12 & -33 \\ 2 & 2 & -3 & 33 & -17 & -7 \\ 0 & -3 & 0 & -12 & -3 & 12 \\ 2 & 1 & -2 & 24 & -13 & 0 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:
$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -18 \\ -8 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} -9 \\ -21 \\ -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} 5 \\ 19 \\ 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = 7e_1 - e_3$, $f_2 = 9e_1 - e_2 - 2e_3$, $f_3 = -3e_1 + e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = (x^1)^2 - 6x^1x^2 + 6x^1x^3 + 5(x^2)^2 - 10x^2x^3 + 4(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $x + 2y - 5z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/3 = z/-2$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 24

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1 - 3x^2 + 8x^3 + x^4 = 0 \\ -x^1 + x^2 - 2x^3 + x^4 = 0 \\ 3x^1 + x^2 - 6x^3 + 4x^4 + 11x^5 = 0 \\ -x^1 + 3x^2 - 8x^3 + 2x^4 + 3x^5 = 0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 5 & 2 & 2 & 5 & -12 \\ 5 & 5 & 2 & -16 & -25 & -30 \\ 2 & 2 & 4 & -16 & -10 & -12 \\ -5 & 0 & -1 & 18 & 25 & 15 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -18 \\ -3 \\ 27 \\ -9 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -37 \\ 23 \\ -11 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 21 \\ -11 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = 9e_1 + 5e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + 5e_2 + 2e_3$, $f_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 9(x^1)^2 - 18x^1x^2 + 18x^1x^3 + 8(x^2)^2 - 16x^2x^3 + 8(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} -7 & 8 & -2 \\ -4 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $2x + 2y - 3z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/-3 = z/1$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 25

---

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1 - 2x^2 + 5x^3 + 3x^4 + 3x^5 = 0 \\ 2x^1 + x^2 - 5x^3 + 3x^4 + 8x^5 = 0 \\ 2x^1 + 3x^2 - 11x^3 + 5x^4 + 12x^5 = 0 \\ -3x^1 + 2x^2 - 3x^3 - x^4 - 5x^5 = 0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -5 & 0 & 1 & -13 & 22 & 25 \\ 0 & -3 & 5 & -3 & -12 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & -27 & -19 & -10 \\ 4 & -5 & 0 & 28 & -15 & -15 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 13 \\ -17 \\ 6 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} -12 \\ -20 \\ -8 \\ 14 \\ -45 \end{pmatrix}.$$

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = e_1 - 6e_2 + 2e_3$, $f_2 = -8e_1 - 5e_2 + 3e_3$, $f_3 = -2e_1 - 2e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Y_f = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 9(x^1)^2 - 18x^1x^2 - 24x^1x^3 + 18(x^2)^2 + 28(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 10 & -8 \\ -3 & -8 & 11 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $3x + 2y - z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/-3 = z/-1$.

Линейная алгебра. Задание 1

Вариант 26

1. Найти нормальную фундаментальную совокупность решений системы линейных однородных уравнений. В качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами.

$$\begin{cases} x^1 - x^2 + 2x^3 + 2x^4 - 5x^5 = 0 \\ 2x^1 + x^2 + 7x^3 + 2x^4 - 5x^5 = 0 \\ x^1 + 2x^2 + 5x^3 + 3x^4 - 3x^5 = 0 \\ -2x^1 + x^2 - 5x^3 - x^4 + 6x^5 = 0 \end{cases}$$

2. Составить и решить систему линейных неоднородных уравнений, заданную расширенной матрицей. Указать нормальную фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы (в качестве базисных переменных выбирать переменные с наименьшими возможными номерами) и частное решение неоднородной системы, отвечающее нулевым значениям свободных переменных.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -4 & -2 & -1 & 11 & -14 & -10 \\ -2 & 0 & 4 & 30 & 2 & -8 \\ -1 & 4 & -4 & -7 & -11 & -16 \\ 3 & -4 & 2 & -13 & 13 & 24 \end{array}\right)$$

3. Найти базис линейной оболочки заданных столбцов и установить линейные зависимости между ними:
$A_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -25 \\ 2 \\ 23 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} -7 \\ 23 \\ 4 \\ 31 \\ -31 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} -5 \\ 35 \\ 4 \\ 21 \\ -33 \end{pmatrix}$.

4. Составить систему линейных однородных уравнений (состоящую из минимального числа уравнений), для которой данные столбцы образуют фундаментальную совокупность решений: $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном вещественном линейном пространстве введены базисы e_1, e_2, e_3 («старый») и f_1, f_2, f_3 («новый»). Найти координаты X_f, Y_e элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, если заданы их координаты X_e, Y_f: $f_1 = e_1 + 2e_2$, $f_2 = -2e_1 - e_2 + e_3$, $f_3 = -2e_1 - 2e_2 + e_3$; $X_e = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y_f = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

6. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.
$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = (x^1)^2 - 6x^1x^2 + 2x^1x^3 - 7(x^2)^2 + 18x^2x^3 - 12(x^3)^2$

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего столбцы матрицы X в столбцы матрицы Y. Вычислить ядро и образ этого оператора. $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и матрица C перехода к новому базису. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу оператора ортогонального проектирования трехмерного евклидова пространства геометрических векторов на заданную плоскость (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Уравнение плоскости проекции $x + 2y - 3z = 0$.

10. Найти матрицу оператора осевой симметрии трехмерного евклидова пространства геометрических векторов относительно заданной прямой (в стандартном ортонормированном базисе). Описать собственные подпространства оператора. Канонические уравнения оси симметрии $x/3 = y/-3 = z/2$.