Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 1

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ -3 & 10 & 7 \\ 2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 0 \\ -12 & -15 & 0 \\ 8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 7 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f,g) = \int\limits_{-3}^{4} f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t,s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x,y)$ имеет вид
$K(t,s) = -2 - t + t^2 + s - 2st - 2st^2 + s^2 + 2s^2t + 2s^2t^2$.

7. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + 2e_2$, $f_3 = e_1 + 3e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -7 & -6 & -12 \\ 4 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 11 & -7 & -9 \\ -7 & 11 & 9 \\ -9 & 9 & 27 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 2

---

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} -13 & -32 & 43 \\ 3 & 4 & -9 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} 4 & 14 & 14 \\ -3 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -9 & -6 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f,g) = \int\limits_{-3}^{3} f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t,s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x,y)$ имеет вид
$K(t,s) = -1 + t - t^2 + 2s - 2st - st^2 + 2s^2t + 2s^2t^2$.

7. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 - 2e_2 - e_3$, $f_2 = -2e_1 + 5e_2 + 2e_3$, $f_3 = -e_1 + 2e_2 + 2e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -9 & 14 & 8 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 9 & -9 & -9 \\ -9 & 9 & 9 \\ -9 & 9 & 27 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -4 \\ -3 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 3

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -6 & -8 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 19 & 21 \\ -1 & -11 & -11 \\ 2 & 10 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_{-3}^{2} f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t, s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x, y)$ имеет вид
$K(t, s) = -1 + t + 2t^2 - s + 2st - st^2 - 2s^2 + s^2t - 2s^2t^2$.

7. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 - 2e_2 - e_3$, $f_2 = -2e_1 + 5e_2 + 3e_3$, $f_3 = -e_1 + 3e_2 + 3e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -7 & 9 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -12 \\ -4 & 8 & 12 \\ -12 & 12 & 24 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 4

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -7 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f,g) = \int\limits_{-3}^{1} f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t,s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x,y)$ имеет вид
$K(t,s) = -1 - 2t - t^2 - 2s - st - 2s^2 - s^2t$.

7. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 - 2e_2 - e_3$, $f_2 = -2e_1 + 5e_2 + 4e_3$, $f_3 = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -13 & 16 & -4 \\ -6 & 6 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 5

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f,g) = \int\limits_{-3}^{0} f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t,s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x,y)$ имеет вид
$K(t,s) = -1 - t - t^2 + 2s - 2st^2 - 2s^2 - 2s^2t$.

7. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 - 2e_2$, $f_2 = -2e_1 + 5e_2 - e_3$, $f_3 = -e_2 + 2e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -11 & 16 & 4 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 11 & -7 & 9 \\ -7 & 11 & -9 \\ 9 & -9 & 27 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 8 & -7 & -4 \\ -7 & 9 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 6

---

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} 7 & 22 & 28 \\ -11 & -28 & -32 \\ 6 & 14 & 15 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 4 & -6 & -18 \\ -2 & 4 & 11 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f,g) = \int\limits_{-3}^{-1} f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t,s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x,y)$ имеет вид
$K(t,s) = -2 + 2t + 2t^2 + s + 2st + 2st^2 - 2s^2 - 2s^2t - s^2t^2$.

7. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 - 2e_2$, $f_2 = -2e_1 + 5e_2 + e_3$, $f_3 = e_2 + 2e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -11 & 16 & -4 \\ -4 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 9 \\ -9 & 9 & -9 \\ 9 & -9 & 27 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 7

---

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -6 \\ -6 & -10 & 6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f,g) = \int\limits_{-3}^{-2} f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t,s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x,y)$ имеет вид
$K(t,s) = t - t^2 - s - 2st - st^2 - 2s^2 + s^2t + 2s^2t^2$.

7. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 9 & 8 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 - e_2 - e_3$, $f_2 = -e_1 + 2e_2$, $f_3 = -e_1 + 3e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 12 \\ -4 & 2 & 6 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 12 \\ -4 & 8 & -12 \\ 12 & -12 & 24 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 8

---

1. Линейный оператор **A** задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \\ -3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор **A** задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора **A**. $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 13 \\ 2 & 1 & 7 \\ -2 & -1 & -7 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_{-2}^{4} f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор **A**, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t, s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x, y)$ имеет вид
$K(t, s) = 2 - 2t - 2t^2 - st - 2st^2 - 2s^2 - s^2t + s^2t^2$.

7. Линейный самосопряженный оператор **A** задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора **A** и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор **A**, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор **A** является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 - e_2 - e_3$, $f_2 = -e_1 + 2e_2 + e_3$, $f_3 = -e_1 + e_2 + 2e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 9

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ -12 & -3 & -24 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} -8 & -12 & 9 \\ 0 & -2 & 0 \\ -6 & -11 & 7 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f,g) = \int\limits_{-2}^{3} f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t,s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x,y)$ имеет вид
$K(t,s) = -2t - t^2 - s + st + st^2 + 2s^2t$.

7. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 - e_2 - e_3$, $f_2 = -e_1 + 2e_2 + 2e_3$, $f_3 = -e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 11 & -9 & -7 \\ -9 & 27 & 9 \\ -7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 6 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 10

---

1. Линейный оператор **A** задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 6 & -8 & -28 \\ -2 & 3 & 11 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор **A** задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора **A**. $A = \begin{pmatrix} -3 & 15 & 5 \\ -2 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f,g) = \int\limits_{-2}^{2} f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор **A**, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t,s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x,y)$ имеет вид
$K(t,s) = -2 + 2t + st - 2st^2 - 2s^2 - s^2t$.

7. Линейный самосопряженный оператор **A** задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора **A** и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор **A**, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор **A** является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 - e_2 - e_3$, $f_2 = -e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $f_3 = -e_1 + 3e_2 + 6e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & -9 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 9 & -9 & -9 \\ -9 & 27 & 9 \\ -9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 9 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 11

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 12 \\ 14 & -24 & 54 \\ 6 & -11 & 25 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -8 \\ -12 & -3 & 12 \\ 4 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f,g) = \int\limits_{-2}^{1} f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t,s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x,y)$ имеет вид
$K(t,s) = -2 + 2t - 2t^2 + st - 2st^2 + s^2 + s^2t - s^2t^2$.

7. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 4 & 11 & 8 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = -e_1 + 2e_2 - 2e_3,\ f_3 = -2e_2 + 5e_3,\ A_f = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 10 \\ -5 & 0 & 10 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 8 & -12 & -4 \\ -12 & 24 & 12 \\ -4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 12

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 8 \\ -6 & 11 & 12 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} 14 & 24 & 24 \\ -8 & -14 & -16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & -17 & 11 \\ 4 & -13 & 10 \\ 4 & -16 & 13 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_{-2}^{0} f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t, s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x, y)$ имеет вид
$K(t, s) = 2 + t^2 - s + 2st^2 + 2s^2 + 2s^2t + s^2t^2$.

7. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = -e_1 + 2e_2 - e_3$, $f_3 = -e_2 + 2e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 12 & -5 & -6 \\ -5 & 4 & 3 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 13

1. Линейный оператор **A** задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -10 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор **A** задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора **A**. $A = \begin{pmatrix} 15 & 36 & -36 \\ -6 & -15 & 12 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} -5 & 33 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 8 & -34 & 7 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_{-2}^{-1} f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор **A**, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t, s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x, y)$ имеет вид
$K(t, s) = -t + 2t^2 + 2s + st - st^2 + 2s^2 - 2s^2t$.

7. Линейный самосопряженный оператор **A** задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора **A** и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 6 & 13 & 12 \\ 6 & 12 & 13 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор **A**, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор **A** является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. f_1, f_2, f_3,
$A_f = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 11 & -9 & 7 \\ -9 & 27 & -9 \\ 7 & -9 & 11 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 6 \\ 7 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 14

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} -7 & 19 & 9 \\ -6 & 15 & 6 \\ 4 & -9 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} 11 & 28 & 0 \\ -6 & -15 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 8 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f,g) = \int\limits_{-1}^{4} f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t,s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x,y)$ имеет вид
$K(t,s) = -t + 2t^2 + 2s + st - st^2 + 2s^2 - 2s^2t$.

7. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 6 & 11 & 12 \\ 6 & 12 & 11 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = -e_1 + 2e_2 + 2e_3$, $f_3 = 2e_2 + 5e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -10 \\ -5 & 0 & -10 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 9 \\ -9 & 27 & -9 \\ 9 & -9 & 9 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ -5 & 13 & 6 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 15

---

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 13 \\ -7 & -18 & 41 \\ -3 & -7 & 16 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -17 & 15 & -15 \\ -10 & 8 & -10 \\ 10 & -10 & 8 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 12 \\ 0 & -3 & 10 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_{-1}^{3} f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t, s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x, y)$ имеет вид
$K(t, s) = -2 - t + t^2 - 2s - st^2 - s^2 + 2s^2t$.

7. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 6 & 14 & 12 \\ 6 & 12 & 14 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $f_2 = -e_1 + 2e_2 - 3e_3$, $f_3 = e_1 - 3e_2 + 6e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 9 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 4 \\ -12 & 24 & -12 \\ 4 & -12 & 8 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 12 & -11 & -6 \\ -11 & 13 & 6 \\ -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 16

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} -9 & -13 & -34 \\ -2 & -4 & -8 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -9 \\ 2 & -4 & -7 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f,g) = \int\limits_{-1}^{2} f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t,s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x,y)$ имеет вид
$K(t,s) = -1 + 2t - 2s + 2st + 2st^2 + s^2 - s^2t + s^2t^2$.

7. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 6 & 10 & 12 \\ 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $f_2 = -e_1 + 2e_2 - 2e_3$, $f_3 = e_1 - 2e_2 + 3e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 7 & 13 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 17

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 10 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t,s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x,y)$ имеет вид
$K(t,s) = 2 - t^2 - 2s - 2st - st^2 - 2s^2t - 2s^2t^2$.

7. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 15 & 12 \\ 6 & 12 & 15 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $f_2 = -e_1 + 2e_2 - e_3$, $f_3 = e_1 - e_2 + 2e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 27 & -9 & 9 \\ -9 & 11 & -7 \\ 9 & -7 & 11 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 18

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f,g) = \int\limits_{-1}^{0} f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t,s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x,y)$ имеет вид
$K(t,s) = 1 + s - st - st^2 - 2s^2 - 2s^2t + 2s^2t^2$.

7. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & 12 \\ 6 & 12 & 9 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $f_2 = -e_1 + 2e_2$, $f_3 = e_1 + 3e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -9 & 6 & -12 \\ -4 & 2 & -6 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 27 & -9 & 9 \\ -9 & 9 & -9 \\ 9 & -9 & 9 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 19

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 0 \\ -9 & 6 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f,g) = \int\limits_0^4 f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t,s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x,y)$ имеет вид
$K(t,s) = 1 - 2t - 2t^2 + 2s + st^2 + s^2t - 2s^2t^2$.

7. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 \\ 8 & 17 & 16 \\ 8 & 16 & 17 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 - e_2 + 2e_3$, $f_2 = -e_1 + 2e_2 - 4e_3$, $f_3 = 2e_1 - 4e_2 + 9e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 3 & -8 & 16 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 24 & -12 & 12 \\ -12 & 8 & -4 \\ 12 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 \\ 8 & 13 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 20

---

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} -7 & -12 & 36 \\ -1 & -6 & 12 \\ -1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -12 & 0 & -15 \\ -15 & 3 & -15 \\ 10 & 0 & 13 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 5 & -5 & -24 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f,g) = \int\limits_0^3 f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t,s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x,y)$ имеет вид
$K(t,s) = 1 - 2t^2 + s + st - 2st^2 - 2s^2t^2$.

7. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 8 \\ 8 & 15 & 16 \\ 8 & 16 & 15 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 - e_2 + 2e_3$, $f_2 = -e_1 + 2e_2 - 3e_3$, $f_3 = 2e_1 - 3e_2 + 6e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -6 & 6 & -12 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ -4 & 13 & 6 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 21

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 11 \\ -7 & -14 & -19 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -11 & 15 & 15 \\ -20 & 24 & 20 \\ 10 & -10 & -6 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f,g) = \int\limits_0^2 f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t,s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x,y)$ имеет вид
$K(t,s) = -2 + 2t - 2t^2 - 2s + 2st - s^2 - 2s^2t - s^2t^2$.

7. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 8 & 18 & 16 \\ 8 & 16 & 18 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_2 - e_3$, $f_3 = -e_1 - e_2 + 3e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 27 & -9 & -9 \\ -9 & 11 & 7 \\ -9 & 7 & 11 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 22

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} 9 & -16 & -12 \\ 2 & -2 & -4 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & -6 \\ -4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 8 & -9 & 38 \\ -8 & 8 & -36 \\ -4 & 4 & -18 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f,g) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^1 f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^1 K(t,s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x,y)$ имеет вид
$K(t,s) = 1 - t + t^2 + s - st - 2st^2 - s^2t^2$.

7. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 8 & 14 & 16 \\ 8 & 16 & 14 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_2 + e_3$, $f_3 = -e_1 + e_2 + 3e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 27 & -9 & -9 \\ -9 & 9 & 9 \\ -9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 13 & -4 & -6 \\ -4 & 5 & 3 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 23

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ -3 & -2 & -10 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 18 \\ -4 & 8 & 8 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & -13 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f,g) = \int\limits_1^4 f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^1 f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^1 K(t,s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x,y)$ имеет вид
$K(t,s) = 1 + 2t + 2t^2 - 2s + 2st + 2st^2 + 2s^2 - 2s^2t + 2s^2t^2$.

7. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 8 \\ 8 & 19 & 16 \\ 8 & 16 & 19 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_2 + 2e_3$, $f_3 = -e_1 + 2e_2 + 6e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ 4 & -4 & -14 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 24 & -12 & -12 \\ -12 & 8 & 4 \\ -12 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 6 \\ 8 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 24

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -15 & -16 & -32 \\ -4 & -3 & -8 \\ 8 & 8 & 17 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & -14 & -38 \\ -3 & 9 & 20 \\ 2 & -5 & -12 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_1^3 f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t, s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x, y)$ имеет вид
$K(t, s) = 1 + 2t - 2t^2 - s + s^2 + s^2t - 2s^2t^2$.

7. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 8 \\ 8 & 13 & 16 \\ 8 & 16 & 13 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 + e_3$, $f_2 = e_2 - 2e_3$, $f_3 = e_1 - 2e_2 + 6e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -8 \\ 4 & -4 & 14 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 \\ -4 & 14 & 6 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 25

1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$. $A = \begin{pmatrix} -8 & 12 & 24 \\ -16 & 20 & 32 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} -12 & -25 & 25 \\ 4 & 10 & -10 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_1^2 f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{-1}^1 f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^1 K(t, s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x, y)$ имеет вид
$K(t, s) = -2 + 2t - 2s - 2st - 2st^2 + s^2 - s^2t + s^2t^2$.

7. Линейный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & 20 & 16 \\ 8 & 16 & 20 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 + e_3$, $f_2 = e_2 - e_3$, $f_3 = e_1 - e_2 + 3e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 9 \\ 7 & 11 & 9 \\ 9 & 9 & 27 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 13 & -10 & -6 \\ -10 & 14 & 6 \\ -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра. Задание 2

Вариант 26

1. Линейный оператор **A** задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Привести матрицу линейного оператора к диагональной форме: $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -8 & -9 & -18 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Линейный оператор **A** задан своей матрицей A относительно некоторого базиса. Найти собственные значения и собственные векторы оператора **A**. $A = \begin{pmatrix} -9 & 32 & -8 \\ -4 & 15 & -4 \\ -4 & 16 & -5 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -10 \\ 13 & -9 & 29 \\ 6 & -4 & 13 \end{pmatrix}$.

4. Применить процесс ортогонализации (без нормировки) к заданной системе столбцов:
$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

5. Построить ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2$. Скалярное произведение определено формулой $(f, g) = \int\limits_2^4 f(t)g(t)dt$.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{-1}^1 f(t)g(t)\,dt$ задан линейный интегральный оператор **A**, действующий по правилу $\mathbf{A}f(t) = \int\limits_{-1}^1 K(t, s)f(s)ds$. Записать в стандартном базисе матрицу этого оператора и матрицу сопряженного оператора. Функция $K(x, y)$ имеет вид
$K(t, s) = -1 + 2t - t^2 + s - 2st - 2st^2 - 2s^2t^2$.

7. Линейный самосопряженный оператор **A** задан своей матрицей A относительно некоторого ортонормированного базиса. Построить ортонормированный базис из собственных векторов оператора **A** и записать матрицу оператора в этом базисе:
$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 8 & 12 & 16 \\ 8 & 16 & 12 \end{pmatrix}$.

8. В евклидовом пространстве столбцов высоты 3 со стандартным скалярным произведением действует линейный оператор **A**, заданный матрицей A_f в неортогональном базисе f_1, f_2, f_3, векторы которого линейно выражены через векторы e_1, e_2, e_3 некоторого ортонормированного базиса. Доказать, что оператор **A** является самосопряженным, найти его собственные значения и собственные векторы и показать, что собственные векторы попарно ортогональны. $f_1 = e_1 + e_3$, $f_2 = e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 + e_2 + 3e_3$, $A_f = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -5 \\ -2 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора A, заданного матрицей в ортонормированном базисе. Убедиться в том, что оператор является неотрицательным, и вычислить $A^{1/2}$: $A = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 27 \end{pmatrix}$.

10. Две квадратичные формы заданы своими матрицами в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства. Привести их к каноническому виду одним линейным невырожденным преобразованием.
$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 8 & 14 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.