Ягола А.Г.

НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ИХ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ.

1. Корректно и некорректно поставленные задачи

Ниже будут изложены основные понятия теории так называемых некорректных (или некорректно поставленных) задач и численные методы их решения при наличии различной априорной информации. Для простоты будут рассмотрены сначала только линейные уравнения в нормированных пространствах, хотя, разумеется, все аналогичные определения могут быть введены и для нелинейных задач в более общих метрических (и даже топологических) пространствах.

В качестве основного объекта рассматривается операторное уравнение:

$$Az = u\,,$$

где A - линейный оператор, действующий из гильбертова пространства Z в гильбертово пространство U. Требуется найти решение операторного уравнения z, соответствующее заданной неоднородности (или правой части уравнения) u.

Такое уравнение является типичной математической моделью для многих физических, так называемых обратных, задач, если предполагать, что искомые физические характеристики z не могут быть непосредственно измерены, а в результате эксперимента могут быть получены только данные u, связанные с z с помощью оператора A.

Французским математиком Ж. Адамаром были сформулированы следующие условия корректности постановки математических задач, которые мы рассмотрим на примере записанного операторного уравнения. Задача решения операторного уравнения называется корректно поставленной (по Адамару), если выполнены следующие три условия:

1) решение существует $\forall u \in U$;
2) решение единственно;
3) если $u_n \to u$, $Az_n = u_n$, $Az = u$, то $z_n \to z$.

Условие 2) обеспечивается тогда и только тогда, когда оператор A является взаимно однозначным (инъективным). Условия 1) и 2) означают, что существует обратный оператор A^{-1}, причем его область определения $D(A^{-1})$ (или множество значений оператора A, $R(A)$) совпадает с U. Условие 3) означает, что обратный оператор A^{-1} является непрерывным, т.е. “малым” изменениям правой части u соответствуют “малые” изменения решения z. Более того, Ж. Адамар считал, что только корректные задачи должны рассматриваться при решении практических задач. Однако хорошо известны примеры некорректно поставленных задач, к изучению и численному решению которых приходится прибегать при рассмотрении многочисленных прикладных задач. Нужно отметить, что устойчивость и неустойчивость решения связаны с тем, как определяется пространство решений *Z*. Выбор пространства решений (в том числе и нормы в нем) обычно определяется требованиями прикладной задачи. Задачи могут быть некорректно поставленными при одном выборе нормы и корректно поставленными при другом.

Многочисленные обратные (в том числе и некорректные) задачи можно найти в различных областях физики. Так, астрофизик не может активно воздействовать на процессы, происходящие на далеких звездах и галактиках, ему приходится делать заключения о физических характеристиках весьма удаленных объектов по их косвенным проявлениям, доступным измерениям на Земле или вблизи Земли (на космических станциях). Прекрасные примеры некорректных задач можно найти в медицине, прежде всего, нужно отметить вычислительную (или компьютерную) томографию. Хорошо известны приложения некорректных задач в геофизике (на самом деле, легче и дешевле судить о том, что делается под поверхностью Земли, решая обратные задачи, чем заниматься бурением глубоких скважин), радиоастрономии, спектроскопии, ядерной физике и т.д., и т.п.

Хорошо известным примером некорректно поставленной задачи является интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода. Пусть оператор *A* имеет вид;

$$Az \equiv \int_a^b K(x,s)z(s)ds = u(x), \quad x \in [c,d].$$

Пусть ядро интегрального оператора $K(x,s)$ - функция, непрерывная по совокупности аргументов $x \in [c,d]$, $s \in [a,b]$, а решение $z(s)$ - непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция. Тем самым, можно рассматривать оператор *A* как действующий в следующих пространствах: $A: C[a,b] \to C[c,d]$. (Пространство $C[a,b]$ состоит из функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$. Норма $z \in C[a,b]$ определяется как $\| z \|_{C[a,b]} = \max\limits_{s\in[a,b]} | z(s) |$.) Покажем, что в этом случае задача решения интегрального уравнения является некорректно поставленной. Для этого нужно проверить условия корректности постановки задачи:

1) Существование решения для любой непрерывной на $[c,d]$ функции $u(x)$. На самом же деле, это не так: существует бесконечно много непрерывных функций, для которых решения нет.

2) Единственность решения. Это условие выполняется в том и только в том случае, если ядро интегрального оператора замкнуто.

Первые два условия корректности эквивалентны условию существования обратного оператора A^{-1} с областью определения $D(A^{-1}) = C[c,d]$. Если ядро интегрального оператора замкнуто, то обратный оператор существует, однако область его определения не совпадает с $C[c,d]$.

3) Устойчивость решения. Это означает, что для любой последовательности $u_n \to \bar{u}$ ($Az_n = u_n$, $A\bar{z} = \bar{u}$) последовательность $z_n \to \bar{z}$. Устойчивость эквивалентна непрерывности обратного оператора A^{-1} при условии, что обратный оператор существует. В данном случае это не так, что видно из следующего примера. Пусть последовательность непрерывных функций $z_n(s)$, n=1, 2, ..., такая, что $z_n(s) \neq 0$ на промежутке $[\frac{a+b}{2} - d_n, \frac{a+b}{2} + d_n]$ и обращается в нуль вне данного интервала, $max|\, z_n(s)\,|$=1, $s \in [a, b]$, а последовательность чисел $d_n \to 0+0$. Такая функция может быть выбрана, например, кусочно-линейной. Тогда для любого $x \in [c,d]$

$$|u_n(x)| = \left|\int_a^b K(x,s) z_n(s) ds\right| = \left|\int_{\frac{a+b}{2}-d_n}^{\frac{a+b}{2}+d_n} K(x,s) z_n(s) ds\right| \le K_0 \cdot 1 \cdot 2d_n \to 0$$

при $n \to \infty$, где $K_0 = \max|K(x,s)|$, $x \in [c,d]$, $s \in [a,b]$.

Последовательность функций $u_n(x)$ равномерно, т.е. по норме $C[c,d]$, сходится к $\bar{u} = 0$. Хотя решение уравнения $A\bar{z} = \bar{u}$ в этом случае $\bar{z} = 0$, последовательность z_n не стремится к $\bar{z}$, так как $\|z_n - \bar{z}\|_{C[a,b]} = 1$.

Интегральный оператор A является вполне непрерывным при действии из $L_2[a,b]$ в $L_2[c,d]$, при действии из $C[a,b]$ в $L_2[c,d]$ и при действии из $C[a,b]$ в $C[c,d]$. (Пространство $L_2[a,b]$ состоит из функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[a,b]$. Норма $z \in L_2[a,b]$ определяется как $\| z \|_{L_2[a,b]} = \{\int_a^b z^2(s) ds\}^{1/2}$). Это означает, что любую ограниченную последовательность этот оператор преобразует в компактную. Компактная последовательность по определению обладает тем свойством, что из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся. Легко указать последовательность z_n, $\|z_n\|_{L_2[a,b]} = 1$, из которой нельзя выделить сходящуюся в $C[a,b]$ подпоследовательность. Например,

$$z_n(x) = (\frac{2}{b-a})^{1/2} \sin\frac{\pi n(x-a)}{b-a};\ n = 1,2,\dots.$$

Нормы всех членов этой последовательности равны 1 в $L_2[a,b]$, но из любой подпоследовательности этой последовательности нельзя выделить сходящуюся, поскольку $\| z_i - z_j \| = \sqrt{2}, i \neq j$. Очевидно, что эта последовательность состоит из непрерывных на $[a,b]$ функций и равномерно (по норме $C[a,b]$) ограничена, но из этой последовательности нельзя выделить сходящуюся в $C[a,b]$ подпоследовательность (тогда она сходилась бы и в $L_2[a,b]$, поскольку из равномерной сходимости следует сходимость в среднем). Если предположить, что оператор A^{-1} является непрерывным, то легко прийти к противоречию. Для существования обратного оператора достаточно потребовать, чтобы прямой оператор A был инъективным. Очевидно, что, если оператор B: $C[c,d]\to C[a,b]$ непрерывный, а оператор A вполне непрерывный, то $BA: C[a,b]\to C[a,b]$ - тоже вполне непрерывный оператор. Но тогда, поскольку для любого n

$$A^{-1}Az_n = z_n,$$

то последовательность z_n компактна, что неверно. Оператор, обратный к вполне непрерывному оператору, не может быть непрерывным. Аналогичное доказательство может быть проведено для любых бесконечномерных банаховых (т.е. полных нормированных) пространств.

Поскольку задача решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода в указанных пространствах некорректно поставлена, то даже при очень малых ошибках в задании $u(x)$ решение может либо отсутствовать, либо как угодно сильно отличаться от искомого точного решения.

Итак, вполне непрерывный инъективный оператор обладает обратным оператором, который не является непрерывным (ограниченным). Более того, при действии в бесконечномерных банаховых пространствах множество значений вполне непрерывного оператора не является замкнутым. Поэтому как угодно близко к неоднородности $u(x)$, для которой решение операторного уравнения существует, найдется неоднородность, для которой решение отсутствует.

Некорректность постановки математической задачи может быть связана с ошибкой в задании оператора. Простейший пример дает задача отыскания нормального псевдорешения системы линейных алгебраических уравнений и возникающая при этом неустойчивость, связанная с ошибками задания матрицы.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$Ax = b,\ \ x\in R^n,\ b\in R^m,\ A: R^n \to R^m.$$

Система может и не иметь решений. Гаусс и Лежандр в начале XIX века ввели метод наименьших квадратов, а именно, вместо решения СЛАУ предложили минимизировать квадратичный функционал (невязку):

$$\Phi(x) = \left\|Ax-b\right\|^2 = (A^*Ax,x) - 2\cdot(A^*b,x) + (b,b),$$

A^* - сопряженная (транспонированная) матрица. Поскольку матрица A^*A неотрицательно определена, то $\Phi(x)$ - выпуклый функционал. Для выпуклого функционала задача отыскания $\min\limits_{x\in R^n}\Phi(x)$ эквивалентна отысканию стационарной точки, т.е. решения уравнения $\Phi'(x)=0$. Легко видеть, что $\Phi'(x) = 2\cdot(A^*Ax - A^*b)$, $\Phi''(x) = 2\cdot A^*A \ge 0$. Из равенства градиента нулю получается система линейных алгебраических уравнений с квадратной неотрицательно определенной матрицей (система нормальных уравнений):

$$A^* Ax = A^* b$$

В конечномерном случае легко доказать, что для любого вектора b система нормальных уравнений всегда имеет решение (для исходного же уравнения это не обязательно), которое называется псевдорешением системы $Ax = b$. Псевдорешение может быть неединственным (если определитель $\det(A^* A) = 0$; если же $\det(A^* A) \neq 0$, то псевдорешение единственно). Множество псевдорешений образует аффинное (или линейное) подпространство и является выпуклым и замкнутым.

Если же система $Ax = b$ имеет решение, то оно совпадает с решением системы $A^* Ax = A^* b$. В этом случае $\min\limits_{x \in R^n} \Phi(x)$=μ=0. Если же $\min\limits_{x \in R^n} \Phi(x)$=μ>0, система $Ax = b$ не имеет решений, но, как уже указывалось выше, имеет псевдорешение (возможно, неединственное). Число μ обычно называется мерой несовместности системы $Ax = b$.

<u>Определение</u>**.** Нормальное псевдорешение x_n системы $Ax = b$ – это псевдорешение с минимальной нормой, что является решением задачи отыскания минимума $\min\limits_{x: A^* Ax = A^* b} \|x\|$.

Легко показать, что нормальное псевдорешение существует и единственно. Поэтому можно поставить задачу: дан вектор b, которому можно поставить в соответствие нормальное псевдорешение x_n. Оператор A^+, который осуществляет это соответствие, является линейным и называется псевдообратным к оператору A: $x_n = A^+ b$. Если существует единственное решение исходной системы $Ax = b$ для любого вектора *b*, то $A^+ = A^{-1}$. Если существует единственное решение задачи $A^* Ax = A^* b$ для любого вектора b (т. е. оператор $A^* A$ обратим), то $A^+ = (A^* A)^{-1} \cdot A^*$. В общем случае выражение для A^+ имеет вид: $A^+ = \lim (A^* \cdot A + \alpha \cdot E)^{-1} \cdot A^*$

при $\alpha \to 0+0$.

Если вместо вектора b задан вектор $\tilde{b}$: $\| \tilde{b} - b \| \leq \delta$, $\delta \geq 0$, и $x_n = A^+ b$, $\tilde{x}_n = A^+ \tilde{b}$, то $\| \tilde{x}_n - x_n \| \leq \| A^+ \| \cdot \delta$ (это доказывает устойчивость решения по правой части). Тем самым, задача отыскания нормального псевдорешения корректно поставлена, если удается точно построить псевдообратный оператор. Однако задача построения псевдообратного оператора A^+ может быть некорректно поставленной, а поэтому задача отыскания $x_n = A^+ b$ может быть неустойчивой по отношению к ошибкам A^+.

<u>Пример.</u> Пусть система имеет вид:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}.$$

Очевидно, что существует бесконечно много решений системы, а $(1/2, 1/2)$ - ее нормальное решение.

В данном случае $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

Пусть имеется ошибка в матрице

$$\begin{cases} (1+\varepsilon)x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}, \ \varepsilon \neq 0,$$

Такая приближенная система имеет единственное решение $x_\varepsilon = 0, y_\varepsilon = 1$, которое не зависит от ε. Более того, при $\varepsilon \to 0$ нет сходимости к нормальному псевдорешению $\begin{pmatrix}1/2\\ 1/2\end{pmatrix}$. Предполагая наличие ошибок во всех четырех элементах матрицы, легко построить примеры сходимости «приближенных» решений к различным векторам при стремлении погрешностей задания элементов к нулю.

Если изменить вектор b и рассмотреть систему

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{2} \\ x+y=\dfrac{3}{2} \end{cases},$$

то она не имеет решения, хотя нормальное псевдорешение получается таким же: $\begin{pmatrix}1/2\\ 1/2\end{pmatrix}$. Легко построить примеры неустойчивости его отыскания.

Задачу решения операторного уравнения иногда удобно рассматривать как задачу вычисления значений неограниченного и не всюду определенного оператора A^{-1}: $z= A^{-1}u$. В таком виде обычно рассматривается задача дифференцирования: $z(x)=\dfrac{du}{dx}$. Очевидно, что если оператор дифференцирования рассматривать как действующий из пространства $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$, то задача вычисления значений этого оператора является некорректно поставленной, поскольку не выполняются первое и третье условия корректности. Если же рассматривать этот оператор как действующий из пространства $C^{(1)}[0, 1]$ в $C[0, 1]$, то задача вычисления значений этого оператора является корректно поставленной. (Пространство $C^{(1)}[a,b]$ состоит из функций, непрерывных и дифференцируемых на отрезке $[a,b]$. Норма $z \in C^{(1)}[a,b]$ определяется как $\| z \|_{C^{(1)}[a,b]} = \max\limits_{s\in[a,b]} | z(s) | + \max\limits_{s\in[a,b]} | z'(s) |$.)

2. **Понятие регуляризирующего алгоритма**

Пусть дано операторное уравнение:

$$Az = u,$$

где A - линейный оператор, действующий из нормированного пространства *Z* в нормированное пространство *U*. В 1963 г. А.Н.Тихонов дал знаменитое определение регуляризирующего алгоритма (РА), которое лежит в основе современной теории некорректно поставленных задач.

Определение. Регуляризирующим алгоритмом (регуляризирующим оператором) $R(\delta, u_\delta) \equiv R_\delta(u_\delta)$ называется оператор, обладающий двумя следующими свойствами**:**

1) $R_\delta(u_\delta)$ определен для любых $\delta > 0$, $u_\delta \in U$, и отображает $(0,+\infty)\times U$ в *Z*;
2) для любого $z \in Z$ и для любого $u_\delta \in U$ такого, что $Az = u$, $\|u - u_\delta\| \le \delta, \delta > 0$

   $z_\delta = R_\delta(u_\delta) \underset{\delta \to 0}{\to} z$.

Задача решения уравнения первого рода называется регуляризируемой, если существует хотя бы один регуляризирующий алгоритм. Непосредственно из определения следует, что если существует хотя бы один РА, то их существует бесконечно много.

В настоящее время все математические задачи можно разделить на следующие классы:

1) корректно поставленные задачи;
2) некорректно поставленные регуляризируемые задачи;
3) некорректно поставленные нерегуляризируемые задачи.

Понятно, что корректно поставленные задачи являются регуляризируемыми, поскольку можно положить $R_\delta(u_\delta) = A^{-1}$. Отметим, что знание $\delta > 0$ в этом случае необязательно.

Далеко не все некорректно поставленные задачи можно регуляризировать, причем это часто зависит от выбора пространств *Z*, *U*. Российский математик Л.Д.Менихес построил пример интегрального оператора с непрерывным замкнутым ядром, действующего из пространства $C[0,1]$ в $L_2[0,1]$, обратная задача для которого (т.е. решение интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода) является нерегуляризируемой. Это связано со свойствами пространства $C[0,1]$. Ниже будет показано, что если пространство *Z* гильбертово, а оператор *A* ограниченный и инъективный, то задача решения операторного уравнения первого рода является регуляризируемой. Этот результат справедлив и для некоторых банаховых пространств, но не для всех. В частности, пространство $C[0,1]$ к таким банаховым пространствам не относится.

Можно дать эквивалентное определение регуляризирующего алгоритма и регуляризируемости операторного уравнения. Пусть задан оператор (отображение) $R_\delta(u_\delta)$, причем $R_\delta(u_\delta)$ определен для любых $\delta > 0$, $u_\delta \in U$, и отображает $(0,+\infty)\times U$ в *Z*. Погрешность решения операторного уравнения в точке $z \in Z$ с помощью оператора $R_\delta(u_\delta)$ при условии, что правая часть *u* задана с погрешностью $\delta > 0$, определяется как $\Delta(R_\delta,\delta,z) = \sup\limits_{u_\delta \in U: \|u_\delta - u\| \le \delta,\ Az=u} \| R_\delta u_\delta - z \|$. Оператор $R_\delta(u_\delta)$ называется регуляризирующим оператором, если для любого $z \in Z$ $\Delta(R_\delta,\delta,z) \underset{\delta\to 0}{\to} 0$. Легко видеть, что данное определение эквивалентно данному выше.

Аналогично можно дать определение регуляризирующего алгоритма для задачи вычисления значений оператора (см. конец предыдущего параграфа), т.е. для задачи вычисления значений отображения $G:\ D(G) \to Y$, $D(G) \subseteq X$ при условии, что аргумент задан с погрешностью (X, Y – метрические или нормированные пространства). Разумеется, задача решения операторного уравнения при условии, что A – инъективный оператор, может рассматриваться как задача вычисления значений оператора A^{-1}.

Огромное значение имеет ответ на следующий очень важный вопрос, можно ли решить некорректную задачу, т.е. построить регуляризирующий алгоритм, не зная погрешность δ.

Если задача корректна, то устойчивый метод, очевидно, можно построить и без знания δ. Так, в случае решения операторного уравнения $z_\delta = A^{-1}u_\delta \to z = A^{-1}u$ при $\delta \to 0$. В случае некорректных задач это невозможно. Приведенная ниже теорема принадлежит А.Б.Бакушинскому и была им доказана для задачи вычисления значений оператора. Аналогичная теорема имеет место и для решения операторного уравнения.

<u>Теорема.</u> Если для вычислений значений оператора G на множестве $D(G) \subseteq X$ существует регуляризирующий оператор, не зависящий от δ (явно), то существует продолжение G на X, которое непрерывно на $D(G) \subseteq X$.

Итак, построение регуляризирующих алгоритмов, не зависящих явно от погрешности, возможно только для задач, корректных на своей области определения.

Следующим свойством некорректно поставленных задач является невозможность оценить погрешность решения, даже если известна погрешность задания правой части операторного уравнения или погрешность задания аргумента в задаче вычисления значений оператора. Этот принципиально важный результат был также впервые доказан А.Б.Бакушинским для решения операторного уравнения.

<u>Теорема.</u> Пусть $\Delta(R_\delta,\delta,z) = \sup\limits_{u_\delta \in U: \|u_\delta - u\| \le \delta,\ Az=u} \| R_\delta u_\delta - z \| \le \varepsilon(\delta) \underset{\delta\to 0}{\to} 0$ для любого $z \in D \subseteq Z$. Тогда сужение обратного оператора на множество AD: $A^{-1}\big|_{AD \subseteq U}$ непрерывно на AD.

Таким образом, равномерная по z оценка погрешности решения операторного уравнения на множестве $D \subseteq Z$ возможна только в том случае, когда обратный оператор непрерывен на AD. Данная теорема справедлива и для нелинейных операторных уравнений, причем в метрических пространствах.

Из определения регуляризирующего алгоритма легко следует, что, если есть хотя бы один регуляризирующий алгоритм, то их может быть сколько угодно. Выбрать же тот, который дает наименьшую ошибку, или сравнивать алгоритмы, сравнивая ошибки полученных приближенных решений, при решении некорректных задач, невозможно при отсутствии априорной информации, которая фактически преобразует такие задачи в корректные. Примеры будут рассмотрены ниже.

Регуляризирующие алгоритмы для операторных уравнений в бесконечномерных банаховых пространствах нельзя сравнивать и по скорости сходимости приближенного решения к точному при стремлении погрешности входных данных к нулю. Этот важный результат принадлежит В.А.Винокурову.

В заключение параграфа приведем определение регуляризирующего алгоритма в случае, если и оператор может быть задан с ошибкой, т.е. вместо оператора A дан линейный ограниченный оператор A_h: $A_h : Z \to U$, такой, что $\|A_h - A\| \le h, \quad h \ge 0$. Для краткости пара погрешностей δ, h записывается как $\eta=(\delta, h)$.

Определение. Регуляризирующим алгоритмом (регуляризирующим оператором) $R(\eta, u_\delta, A_h) \equiv R_\eta(u_\delta, A_h)$ называется оператор, обладающий двумя следующими свойствами:

1) $R_\eta(u_\delta, A_h)$ определен для любых $\delta > 0$, $h \ge 0$, $u_\delta \in U$, $A_h \in L(Z,U)$, и отображает $(0,+\infty)\times[0,+\infty)\times U \times L(Z,U)$ в Z;

2) для любого $z \in Z$, для любого $u_\delta \in U$ такого, что $Az = u$, $\|u - u_\delta\| \le \delta, \delta > 0$ и для любого $A_h \in L(Z,U)$ такого, что $\|A_h - A\| \le h, \quad h \ge 0$, $z_\eta = R_\eta(u_\delta, A_h) \underset{\eta\to 0}{\to} z$.

Здесь $L(Z,U)$ - пространство линейных ограниченных операторов, действующих из Z в U, с нормой, определяемой обычным образом.

Аналогично можно дать определение регуляризирующего алгоритма в случае, когда операторное уравнение рассматривается только на множестве $D \subseteq Z$, т.е. имеется априорная информация о том, что точное решение $z \in D \subseteq Z$.

Невозможность построения регуляризирующих алгоритмов, не зависящих явно от h, для решения некорректно поставленных СЛАУ с приближенно заданной матрицей была впервые отмечена А.Н.Тихоновым.

3. Некорректные задачи на компактах

Пусть дано операторное уравнение:

$$Az = u,$$

где A - линейный инъективный оператор, действующий из нормированного пространства Z в нормированное пространство U. Пусть $\bar{z}$ - точное решение операторного уравнения, $A\bar{z} = \bar{u}$, $\bar{u}$ - точная правая часть и задана приближенная правая часть u_δ такая, что $\|\bar{u} - u_\delta\| \le \delta, \delta > 0$.

Множество $Z_\delta = \{z_\delta : \|Az_\delta - u_\delta\| \le \delta\}$ является множеством приближенных решений операторного уравнения. Для линейных некорректных задач $diam\, Z_\delta = \sup\{\| z_1 - z_2 \| : z_1, z_2 \in Z_\delta\} = \infty$ для любого $\delta > 0$, поскольку обратный оператор A^{-1} не ограничен.

Возникает вопрос: нельзя ли использовать дополнительную априорную информацию для того, чтобы сузить множество приближенных решений, а еще лучше получить корректную задачу. А.Н.Тихонову принадлежит следующая идея: если известно, что множество решений является компактом, то задача решения операторного уравнения корректна при условии, что приближенная правая часть операторного уравнения также принадлежит образу компакта. Для доказательства этого утверждения А.Н.Тихонов применил следующую теорему.

Теорема. Пусть инъективный непрерывный оператор A действует: $D \in Z \to AD \in U$, где Z, U - нормированные пространства, D - компакт. Тогда обратный оператор A^{-1} непрерывен на AD.

Теорема верна и для нелинейных операторов. Таким образом, решение операторного уравнения на компакте является корректной задачей при условии, что приближенная правая часть принадлежит AD. Эта идея позволила М.М.Лаврентьеву ввести понятие задачи, корректной по Тихонову (предполагается существование множества корректности, на котором задача становится корректной), а В.К.Иванову дать определение квазирешения некорректной задачи.

Приведенная выше теорема неприменима, если $u_\delta \notin R(A)$. Поэтому необходимо ее обобщить.

Определение. Элемент $z_\delta \in D$ такой, что $z_\delta = \arg\min_{z \in D} \|Az - u_\delta\|$, называется квазирешением операторного уравнения на компакте D ($z_\delta = \arg\min_{z \in D} \|Az - u_\delta\|$ означает, что $\|A\, z_\delta - u_\delta\| = \min\{\|A\, z - u_\delta\| : z \in D\}$).

Квазирешение существует, но возможно не единственно. Тем не менее, для любого квазирешения имеет место сходимость к точному решению: $z_\delta \to \bar{z}$ при $\delta \to 0$. При этом знание δ не обязательно. Если же погрешность δ известна, то

1) в качестве приближенного решения может быть взят любой элемент $z_\delta \in D$, удовлетворяющий неравенству: $\|Az_\delta - u_\delta\| \le \delta$ (δ-квазирешение);

2) можно найти погрешность приближенного решения, решив экстремальную задачу:

найти $max\|z-z_\delta\|$ по всем $z \in D$, удовлетворяющим неравенству: $\|Az - u_\delta\| \le \delta$ (очевидно, что точное решение удовлетворяет данному неравенству).

Таким образом, задача отыскания квазирешения практически не отличается от корректной. Не выполняется, вообще говоря, только условие единственности квазирешения.

Если же и оператор A задан с погрешностью, то понятие квазирешения вводится, как и выше, заменой оператора A на оператор A_h.

<u>Определение.</u> Элемент $z_\eta \in D$ такой, что $z_\eta = \arg\min_{z \in D} \|A_h z - u_\delta\|$, называется квазирешением операторного уравнения на компакте D.

В качестве же приближенного решения может быть выбран любой элемент $z_\eta \in D$, удовлетворяющий неравенству: $\|Az_\eta - u_\delta\| \le \delta + h \| z_\eta \|$ (η-квазирешение).

Если Z и U – гильбертовы пространства, то многие численные методы отыскания квазирешений для линейных операторных уравнений основаны на том, что функционал невязки $\|Az - u_\delta\|^2$ является выпуклым и дифференцируемым. Если D - выпуклый компакт, то нахождение квазирешения - задача выпуклого программирования. Записанные выше неравенства, определяющие приближенные решения на компактах, могут быть использованы в качестве критериев остановки минимизации функционала невязки. Задача отыскания погрешности найденного приближенного решения является нестандартной задачей выпуклого программирования, поскольку при решении этой задачи требуется найти максимум, а не минимум выпуклого функционала.

Хорошо известны множества корректности, которые часто встречаются в прикладных задачах. Прежде всего, если известно, что точное решение принадлежит конечно-параметрическому семейству функций, то ставится задача отыскания параметров, которая может быть корректной и в том случае, если задача без этой априорной информации является некорректной.

Если в операторном уравнении неизвестной является функция $z(s)$, $s \in [a, b]$, о которой известно, что она является монотонной и ограниченной, то этой информации оказывается достаточно для выделения компакта в пространстве $L_2[a, b]$. Для отыскания квазирешения после перехода к конечно-разностной аппроксимации могут быть применены известные методы квадратичного программирования, например, метод проекции сопряженных градиентов или метод условного градиента. Аналогичный подход применим и при наличии априорной информации о том, что точное решение является ограниченной и выпуклой, или монотонной и выпуклой, или имеющей заданное число максимумов и минимумов функцией. В этих случаях возможно отыскание и погрешности приближенного решения.

4. Некорректные задачи в случае истокопредставимости решения

Пусть линейный оператор A инъективный, непрерывный и отображает $Z \to U$; Z, U - нормированные пространства. Пусть также имеется следующая априорная информация, которая встречается при решении многих физических задач. Известно, что точное решение $\bar{z}$ для уравнения $\bar{u} = A\bar{z}$ представимо в виде $B\bar{v} = \bar{z}$, $\bar{v} \in V$; $B: V \to Z$; B - инъективный, вполне непрерывный оператор; V –гильбертово пространство. Предполагается, что известны u_δ - неточная правая часть такая, что $\left\|\bar{u} - u_\delta\right\| \le \delta$, и ее погрешность $\delta > 0$.

Ниже рассматривается метод расширяющихся компактов, идея и обоснование которого принадлежит В.К.Иванову и И.Н.Домбровской.

Сначала номер итерации полагается n=1 и определяется замкнутый шар в пространстве V: $\overline{S_n}(0) = \{v : \left\|v\right\| \le n\}$. Его образ при действии оператора B $Z_n = B\overline{S_n}(0)$ является компактом, поскольку B - вполне непрерывный оператор, а V –гильбертово пространство. Далее отыскивается $\min\limits_{z \in B(\overline{S_n}(0))} \left\|Az - u_\delta\right\|$, где u_δ- заданная неточная правая часть $\left\|\bar{u} - u_\delta\right\| \le \delta, \delta > 0$. Существование минимума гарантируется постановкой задачи – компактностью Z_n и непрерывностью A. Если $\min\limits_{z \in B(\overline{S_n}(0))} \left\|Az - u_\delta\right\| \le \delta$, тогда процесс прекращается, полагается $n(\delta) = n$, а в качестве приближенного решения выбирается любой элемент $z_{n(\delta)} : z_{n(\delta)} \in B(\overline{S_{n(\delta)}}(0))$ и $\| Az_{n(\delta)} - u_\delta \| \le \delta$. Если же $\min\limits_{z \in B(\overline{S_n}(0))} \left\|Az - u_\delta\right\| > \delta$, то нужно расширять компакт, для чего n увеличивается на единицу, процесс повторяется.

<u>Теорема.</u> Описанный выше процесс сходится: $n(\delta) < +\infty$. Существует $\delta_0 > 0$ (которое, вообще говоря, зависит от $\bar{z}$) такое, что $n(\delta) = n(\delta_0)$ $\forall \delta \in (0, \delta_0]$. Приближенное решение $z_{n(\delta)}$ сходится к точному решению $\bar{z}$ при $\delta \to 0$.

Из сказанного выше понятно название метода. Оказывается, этот метод допускает возможность построения так называемой апостериорной оценки погрешности, т.е. существует функция $\chi(u_\delta, \delta)$ такая, что $\chi(u_\delta, \delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, и $\chi(u_\delta, \delta) \ge \| z_{n(\delta)} - \bar{z} \|$ по крайней мере, при достаточно малых $\delta > 0$. В качестве апостериорной оценки погрешности можно взять $\chi(u_\delta, \delta) = \max\{\| z_{n(\delta)} - z \| : z \in Z_{n(\delta)}, \| Az - u_\delta \| \le \delta\}$.

Апостериорная оценка погрешности не является оценкой погрешности в полном смысле слова, построение оценки погрешности решений некорректно поставленных задач невозможно. Однако при достаточно малых $\delta > 0$ (а именно $\forall \delta \in (0, \delta_0]$) апостериорная оценка погрешности является оценкой погрешности решения некорректной задачи при наличии априорной информации об истокопредставимости.

Данный подход легко обобщается на случаи, когда операторы A и B заданы с погрешностями, а также на нелинейные некорректные задачи с условием истокопредставимости.

Разработаны численные методы решения линейных некорректных задач при условии истокопредставимости, в том числе и построения апостериорной оценки погрешности. Использование последовательности натуральных числе в качестве радиусов шаров в пространстве V не обязательно. Может быть взята любая монотонно возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел.

5. Вариационный подход к построению регуляризирующих алгоритмов

Вариационный подход к построению регуляризирующих алгоритмов был впервые предложен А.Н.Тихоновым. Ниже будет описан регуляризирующий алгоритм Тихонова, основанный на минимизации сглаживающего функционала (или функционала Тихонова).

Пусть дано операторное уравнение:

$$Az = u,$$

где A - линейный ограниченный инъективный оператор, действующий из гильбертова пространства Z в гильбертово пространство U. Предполагается, что точное решение $\bar{z} \in D \subseteq Z$, где D – замкнутое выпуклое множество такое, что $0 \in D$. Множество D определяется известными априорными ограничениями; если ограничений нет, то $D=Z$. В этом параграфе ограничения могут быть не столь сильными, как в предыдущих разделах, и применение метода квазирешений или метода расширяющихся компактов, вообще говоря, невозможно. Тем не менее, рекомендуется при решении практических задач включать все известные ограничения в постановку обратной задачи. К таким ограничениям относятся типичные для очень многих физических задач условия неотрицательности, ограниченности сверху и снизу заданными константами и многие другие.

Пусть точное значение правой части уравнения $A\bar{z} = \bar{u}$ неизвестно, но задано ее приближение u_δ такое, что $\|\bar{u} - u_\delta\| \le \delta$, и погрешность $\delta > 0$. Пусть оператор A также задан с ошибкой, т.е. задан линейный ограниченный оператор $A_h : Z \to U$; $\|A_h - A\| \le h$; и погрешность $h \ge 0$. Для краткости пара погрешностей обозначается $\eta = (\delta, h)$. Задача построения регуляризирующего алгоритма состоит в следующем: требуется по набору данных $\{u_\delta, A_h, \eta\}$ построить приближенное решение $z_\eta \in D$ такое, что $z_\eta \to \bar{z}$ при $\eta \to 0$, или $z_\eta = R_\eta(u_\delta, A_h) \in D$, $z_\eta \to \bar{z}$ при $\eta \to 0$, где $R_\eta(u_\delta, A_h)$ - регуляризирующий алгоритм.

А.Н.Тихонов предложил следующий подход к построению регуляризирующих алгоритмов. Вводится функционал (функционал Тихонова): $M^\alpha[z] = \|A_h z - u_\delta\|^2 + \alpha \cdot \|z\|^2$, $\alpha > 0$- параметр регуляризации, и ставится экстремальная задача: найти $\min_{z \in D} M^{\alpha}[z]$. При условиях, сформулированных в начале параграфа, существует единственный элемент $z_{\eta}^{\alpha} = \arg\min_{z \in D} M^{\alpha}[z]$.

Численные методы отыскания элемента, на котором функционал Тихонова достигает минимального значения при фиксированном значении параметра регуляризации, основаны, в основном, на двух следующих подходах: 1) Если ограничений нет (D=Z), то необходимым и достаточным условием минимума является обращение в нуль градиента. Таким образом, получается уравнение Эйлера для функционала Тихонова: $(M^{\alpha}[z])' = 0$. После перехода к конечно-разностной аппроксимации полученная СЛАУ решается на компьютере. Для ряда задач специального вида возможно применение различных преобразований, упрощающих решение получившейся СЛАУ. Так, для уравнений типа свертки (задача, часто встречающаяся при обработке изображений), в том числе и многомерных, успешно применяется быстрое дискретное преобразование Фурье. 2) При наличии ограничений и при их отсутствии могут применяться прямые методы минимизации функционала Тихонова (метод сопряженных градиентов с ограничениями или без, метод Ньютона и др.).

Если ограничения отсутствует, то задача отыскания экстремали функционала Тихонова сводится к решению уравнения $A_h^* A_h z + \alpha z = A_h^* u_{\delta}$. В случае положительно определенного самосопряженного оператора A и равенства Z=U регуляризированное приближение может находиться из уравнения $Az + \alpha z = u_{\delta}$ (метод М.М.Лаврентьева).

Для построения РА необходимо определить способ выбора параметра регуляризации α. Параметр регуляризации при решении некорректно поставленных задач должен явно зависеть от погрешностей. В противном случае, в соответствии с теоремами А.Б.Бакушинского и А.Н.Тихонова, могут решаться только корректные задачи. Как показывают простые примеры, известные методы выбора параметра регуляризации “L-кривой” и “generalized cross-validation” (GCV) (обобщенной перекрестной проверки), в которых параметр регуляризации не зависит явно от погрешностей задания правой части и оператора, не только не могут быть применены для решения некорректно поставленных задач, но и дают неверные результаты при решении простейших корректных задач.

Методы выбора параметра регуляризации условно подразделяются на априорные и апостериорные. Первый априорный способ выбора был предложен А.Н.Тихоновым. Некоторое обобщение приведено ниже. Пусть задана скорость убывания параметра регуляризации: а) $\alpha(\eta) \underset{\eta \to 0}{\to} 0$; б) $\dfrac{(\delta + h)^2}{\alpha(\eta)} \underset{\eta \to 0}{\to} 0$, то есть $\alpha(\eta) \to 0$ медленнее, чем $(\delta + h)^2$. В этом случае можно доказать, что $z_{\eta}^{\alpha(\eta)} \underset{\eta \to 0}{\to} \bar{z}$. Если оператор A не является инъективным, то имеет место сходимость к решению с минимальной нормой (нормальному решению).

Практическое применение априорных способов выбора параметра регуляризации вызывает большие затруднения, поскольку при решении прикладных задач необходимо найти приближенное решение при фиксированном уровне погрешностей. В качестве примера апостериорного способа ниже описан обобщенный принцип невязки (ОПН), предложенный и обоснованный А.В.Гончарским, А.С.Леоновым, А.Г.Яголой. ОПН является обобщением принципа невязки В.А.Морозова, разработанного для случая точного заданного оператора (h=0).

Определение. Мерой несовместности операторного уравнения с приближенными данными на множестве $D \subset Z$ называется

$$\mu_\eta(u_\delta, A_h) = \inf_{z \in D} \left\| A_h z - u_\delta \right\|$$

Очевидно, что $\mu_\eta = 0$, если $u_\delta \in \overline{A_h D}$.

Лемма. Если $\left\| u_\delta - \bar{u} \right\| \le \delta, \bar{u} = A\bar{z}, \bar{z} \in D, \left\| A - A_h \right\| \le h$, то $\mu_\eta(u_\delta, A_h) \xrightarrow[\eta \to 0]{} 0$.

Если мера несовместности вычисляется с погрешностью $k \ge 0$, согласованной с погрешностями h, то вместо $\mu_\eta(u_\delta, A_h)$ известно $\mu_\eta^k(u_\delta, A_h)$, удовлетворяющее неравенствам:

$\mu_\eta(u_\delta, A_h) \le \mu_\eta^k(u_\delta, A_h) \le \mu_\eta(u_\delta, A_h) + k$; $\kappa = \kappa(\eta) \to 0$ при $\eta \to 0$.

Определение. Функция параметра регуляризации $\alpha > 0$:

$$\rho_\eta^k(\alpha) = \left\| A_h z_\eta^\alpha - u_\delta \right\|^2 - (\delta + h\left\| z_\eta^\alpha \right\|)^2 - (\mu_\eta^k(u_\delta, A_h))^2$$

называется обобщенной невязкой.

Следующий способ выбора параметра регуляризации называется обобщенным принципом невязки. Пусть условие $\| u_\delta \|^2 > \delta^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2$ не выполнено; тогда в качестве приближенного решения выберем $z_\eta = 0$. В противном случае обобщенная невязка имеет положительный корень $\alpha^* > 0$, то есть $\rho_\eta^\kappa(\alpha^*) = 0$, или $\left\| A_h z_\eta^{\alpha^*} - u_\delta \right\|^2 = (\delta + h\left\| z_\eta^{\alpha^*} \right\|)^2 + (\mu_\eta^k(u_\delta, A))^2$.

В этом случае приближенное решение $z_\eta = z_\eta^{\alpha^*}$ определяется единственным образом. Можно доказать, что $z_\eta \xrightarrow[\eta \to 0]{} \bar{z}$. Если оператор A не является инъективным, то имеет место сходимость к решению с минимальной нормой (нормальному решению).

Для отыскания корня обобщенной невязки необходимо знать следующие ее свойства:

1. $\rho_\eta^\kappa(\alpha\ )$ непрерывна и монотонно не убывает при $\alpha > 0$.

2. $\lim \rho_\eta^\kappa(\alpha) = \| u_\delta \|^2 - \delta^2 - (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2$ при $\alpha \to +\infty$.

3. $\lim \rho_\eta^\kappa(\alpha) \le -\delta^2$ при $\alpha \to 0 + 0$.

Из условий 1)-3) в случае, если $\| u_\delta \|^2 > \delta^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2$, сразу же следует существование корня обобщенной невязки, который может быть найден с использованием известных численных методов отыскания корней монотонных непрерывных функций (например, метод секущих).

Для того чтобы выяснить, какое же решение выбирается в соответствии с ОПН, необходимо рассмотреть следующую экстремальную задачу, которая называется обобщенным методом невязки (ОМН):

Найти $\inf\|z\|,\ z \in \left\{z : z \in D,\ \|A_h z - u_\delta\|^2 \le (\delta + h\|z\|)^2 + (\mu_\eta^k(u_\delta, A_h))^2\right\}$.

<u>Теорема.</u> Пусть A, A_h – линейные ограниченные операторы из Z в U; D – замкнутое выпуклое множество, содержащее точку 0, $D \subseteq Z$; $\|A - A_h\| \le h, \|u_\delta - \bar{u}\| \le \delta,\ \bar{u} = A\bar{z},\ \bar{z} \in D.$ Тогда обобщенный принцип невязки и обобщенный метод невязки эквивалентны, т.е. решение операторного уравнения, выбранное в соответствии с ОПН, и решение экстремальной задачи ОМН совпадают.

Если рассматривать множество $\left\{z : z \in D,\ \|A_h z - u_\delta\|^2 \le (\delta + h\|z\|)^2 + (\mu_\eta^k(u_\delta, A_h))^2\right\}$ как множество приближенных решений операторного уравнения с приближенными данными (точное решение $\bar{z}$ является элементом этого множества в силу условий теоремы), то в соответствии с ОПН выбирается приближенное решение с минимальной нормой. В частности, если в качестве пространства Z рассматривается пространство $W_2^1[a,b]$ (норма в этом пространстве определяется $\| z \| = \{\int_a^b z^2(s)ds + \int_a^b (z'(s))^2 ds\}^{1/2}$, в определение нормы входит производная), то говорят, что выбирается наиболее гладкое решение.

В случае наличия априорной информации о близости решения к заданному элементу z_0 легко адаптировать ОПН на случай отыскания приближенного решения, ближайшего (по норме) к z_0. Для этого достаточно заменить искомое решение на z-z_0, преобразовав соответствующим образом правую часть уравнения.

Существуют многочисленные модификации ОПН. Так, можно отказаться от вычисления меры несовместности и рассматривать обобщенную невязку в виде: $\rho_\eta^k(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|^2 - (\delta + h\|z_\eta^\alpha\|)^2$. В этом случае, однако, не гарантируется существование положительного корня обобщенной невязки. В случае его отсутствия приближенное решение находится как $z_\eta = \lim z_\eta^\alpha$ при $\alpha \to 0 + 0$. При этом ОПН и соответствующий ОМН, вообще говоря, не эквивалентны.

ОПН не может быть применен непосредственно к решению несовместных задач (отыскания их псевдорешений или нормальных псевдорешений). Тем не менее, его можно модифицировать и для этого случая. Для этого необходимо изменить вид обобщенной невязки и использовать оценку сверху меры несовместности, предложенную А.М.Левиным. Он же разработал и численные методы вычисления этой оценки. Нужно заметить, что задача вычисления меры несовместности может быть некорректно поставленной. Так, пусть дано одно алгебраическое уравнение с одной неизвестной: $0 \cdot x=1$. Очевидно, что мера несовместности равна

1. Однако, как угодно малое изменение «оператора», т.е. коэффициента при неизвестной, приводит к тому, что мера несовместности становится равной нулю. Оценка А.М.Левина имеет вид: $\hat{\mu}_\eta = \inf(\delta + h \| z \| + \| A_h z - u_\delta \|), z \in D$.

Пусть $\bar{z} \in D$ - точное псевдорешение операторного уравнения $Az=u$ на множестве D, соответствующее неоднородности $\bar{u}$, т.е. $\| A\bar{z} - \bar{u} \| = \bar{\mu}$, где $\bar{\mu} = \inf \| Az - \bar{u} \|, z \in D$. Справедлива

Лемма. $\hat{\mu}_\eta \geq \bar{\mu}$, $\hat{\mu}_\eta \to \bar{\mu}$ при $\eta \to 0$.

Обобщенная невязка, предназначенная решения для как совместных, так и несовместных некорректных задач, имеет вид: $\hat{\rho}^k_\eta(\alpha) = \left\| A_h z^\alpha_\eta - u_\delta \right\|^2 - (\delta + h \left\| z^\alpha_\eta \right\| + \hat{\mu}^k_\eta(u_\delta, A_h))^2$. Здесь предполагается, как и ранее, что оценка сверху меры несовместности вычисляется с погрешностью $\kappa = \kappa(\eta) \to 0$ при $\eta \to 0$. ОПН формулируется следующим образом. Пусть условие $\| u_\delta \| > \delta + \hat{\mu}^\kappa_\eta(u_\delta, A_h)$ не выполнено; тогда в качестве приближенного решения выберем $z_\eta = 0$. В противном случае обобщенная невязка имеет положительный корень $\alpha^* > 0$, то есть $\hat{\rho}^\kappa_\eta(\alpha^*) = 0$, или $\left\| A_h z^{\alpha^*}_\eta - u_\delta \right\| = \delta + h \left\| z^{\alpha^*}_\eta \right\| + \hat{\mu}_\eta(u_\delta, A_h)$. В этом случае приближенное решение $z_\eta = z^{\alpha^*}_\eta$ определяется единственным образом. Можно доказать, что $z_\eta \underset{\eta \to 0}{\to} \bar{z}$, где $\bar{z} \in D$ - точное псевдорешение. Если оператор A не является инъективным, то имеет место сходимость к решению с минимальной нормой (нормальному псевдорешению). Понятно, что изложенный метод может быть применен и для разрешимых задач.

6. Нелинейные некорректные задачи

Теоретическое обобщение изложенных выше результатов может быть перенесено и на случай, когда оператор A нелинейный. В случае точно заданного оператора также может быть введено понятие квазирешения и приближенного решения на компакте. В случае приближенно заданного оператора A_h определение квазирешения не претерпевает изменений, однако для определения приближенного решения необходимо ввести функцию, описывающую степень близости операторов. Обычно в случае приближенно заданного оператора A_h степень его близости к оператору A определяется параметром $h \geq 0$ и функцией $\psi(h,z) \geq 0$ такой, что $\| A_h z - Az \| \leq \psi(h,z)$, $\psi(h,z) \to 0$ монотонно по h при $h \to 0$, при выполнении определенных, зависящих от конкретной задачи свойств по второму аргументу. В линейном случае обычно $\psi(h,z) = h \| z \|$. Наибольшую сложность вызывает минимизация функционала невязки, поскольку в этом случае этот функционал, вообще говоря, не выпуклый. К сожалению, нет общих рекомендаций, как решать эту задачу. Каждый раз должно проводиться отдельное исследование.

Метод расширяющихся компактов в случае нелинейности оператора A исследуется полностью аналогично линейному случаю и допускает обобщение на случай операторов, заданных с ошибками.

А.Н.Тихонов применил вариационный подход, основанный на минимизации сглаживающего функционала, и для решения нелинейных некорректных задач. В этом случае, однако, даже при решении некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах недостаточно предполагать только непрерывность и инъективность оператора A. Необходимо требовать либо усиленную непрерывность оператора A (слабо сходящиеся последовательности в пространстве Z оператор A преобразует в сильно сходящиеся последовательности в пространстве U), либо использовать схему с тремя пространствами (схему компактного вложения): $V \to Z \to U$. Оператор $A : Z \to U$ является непрерывным; пространство V вкладывается в пространство Z, причем оператор вложения B вполне непрерывен. Далее рассматривается функционал Тихонова $M^{\alpha}[v] = \left\| A_h Bv - u_{\delta} \right\|^{p} + \alpha \cdot \left\| v \right\|^{2}$, а интерес представляет $z=Bv$. Такая схема была применена А.Н.Тихоновым в его первых работах по теории регуляризации для пространств $V = W_2^1[a,b]$, $Z = C[a,b]$, $U = L_2[c,d]$. В дальнейшем А.Б.Бакушинский доказал, что при построении РА для линейных некорректных задач достаточно использовать два пространства.

Выбор параметра регуляризации в соответствии с апостериорными принципами потребовал определения не только его значения, но и выбора определенной экстремали, в связи с тем, что функции параметра регуляризации (например, обобщенная невязка) могут быть разрывными, а экстремали неединственными. В линейном случае при условиях, сформулированных выше, экстремаль функционала Тихонова определяется единственным образом. Эти вопросы исследованы в работах А.В.Гончарского, А.С.Леонова, А.Г.Яголы.

В нелинейном случае, возможны РА типа ОМН. При этом также требуется либо усиление требований к оператору, либо использование схемы компактного вложения. Результат об эквивалентности ОПН и ОМН, справедливый в линейном случае, в нелинейном случае, вообще говоря, неверен.

7. Итеративные и другие методы

Из-за небольшого объема статьи не имеет смысла описывать все возможные подходы к построению РА. Они могут быть изложены в рамках единой схемы поточечной аппроксимации обратного оператора и согласования параметра, определяющего аппроксимацию, с погрешностью входных данных.

В случае если известно (или может быть вычислено) спектральное разложение оператора, возможно применение методов «спектральной срезки», т.е. согласование используемых в вычислениях «высоких частот» с погрешностью задания входных данных.

Для СЛАУ разработаны регуляризированные варианты метода сингулярного разложения, согласовывающие отбрасываемые минимальные сингулярные числа с погрешностями задания матрицы и правой части. Интерес представляет метод минимальной псевдообратной матрицы, предложенный А.С.Леоновым, в котором из множества псевдообратных матриц, соответствующих заданной приближенной матрице и ее погрешности, выбирается матрица, имеющая минимальную норму, после чего отыскивается приближенное нормальное псевдорешение СЛАУ.

В работах М.М.Лаврентьева, О.М.Алифанова, А.Б.Бакушинского, Г.М.Вайникко, В.В.Васина, Х.Энгла и других авторов предложены и развиты так называемые итеративные методы решения некорректных задач. Для этих методов параметром регуляризации является номер итерации, и должно быть сформулировано правило остановки, согласующее число итераций с погрешностью входных данных. Простейший пример итеративного метода дает метод простой итерации. Пусть пространства Z и U гильбертовы, причем $Z=U$, оператор A – самосопряженный, неотрицательно определенный, вполне непрерывный, $||A||<1$, и уравнение $Az=u$ разрешимо. Тогда уравнение можно переписать в виде $z=z-(Az-u)$ и, задав начальное приближение $z^{(0)}$, организовать итерационный процесс, который называется методом простой итерации: $z^{(k+1)}= z^{(k)}-(A\, z^{(k)}-u)$. Процесс сходится к нормальному решению операторного уравнения. Если $||A||\geq 1$, то предварительно следует ввести нормирующий множитель. Если исходное уравнение переписать в виде: $Az+\beta z=\beta z+u$, $\beta>0$, то $z=(A+\beta I)^{-1}(\beta z+u)$, где I – единичный оператор, то далее можно записать итерационный процесс: $z^{(k+1)}=(A+\beta I)^{-1}(\beta z^{(k)}+u)$, который называется неявной итерационной схемой. Она обладает свойством сходимости к нормальному решению операторного уравнения и при невыполнении условия $||A||<1$, Если оператор A не является самосопряженным и неотрицательно определенным, то для построения итерационных процессов, описанных выше, уравнение нужно предварительно преобразовать к виду $A^*Az=A^*u$. В случае приближенно заданных входных данных, если задача некорректно поставлена, должны быть сформулированы правила остановки (например, по невязке или по обобщенной невязке). Описанные выше два итерационных процесса относятся к линейным итерационным процессам. К нелинейным итерационным процессам, применяемым для решения некорректных задач, относятся обобщения методов наискорейшего спуска, минимальных невязок и другие. В соответствии с принципом итеративной регуляризации многие классические методы, предназначенные, в основном, для минимизации функционала невязки (метод Ньютона, метод сопряженных градиентов и другие) с помощью введения регуляризирующих поправок могут быть преобразованы в РА.

Ниже приводится список литературы, состоящий из некоторых основных монографий и учебников, посвященных теории и численным методам решения некорректно поставленных задач и освещающих их различные разделы.

Список литературы

1. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1988.
2. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1989.
3. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. - М.: Изд-во МГУ, 1989.
4. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. – М.: Наука, 1986.
5. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. – Екатеринбург, Наука, 1993.
6. Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. – Екатеринбург, УрО РАН, 2005.
7. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. - М.: Изд-во МГУ, 1994.
8. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978.
9. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
10. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980.
11. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Линейные операторы и некорректные задачи. – М.: Наука, 1991.
12. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1987.
13. Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М. Основы метода динамической регуляризации. - М.: Изд-во МГУ, 1999.
14. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1979.
15. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. - М.: Наука, 1983.
16. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1990.
17. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. - М.: Наука, 1995.
18. Федотов А.М. Некорректные задачи со случайными ошибками в данных. - Новосибирск: Наука, 1990.
19. Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. Regularization of Inverse Problems. – Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1996.

20. Groetsch C. W. Inverse problems in the mathematical sciences. – Braunschweig, Vieweg, 1993.