

1.1.1. Асимптотические методы математического моделирования физических процессов, описываемых уравнением реакции-адвекции-диффузии с разрывной функцией плотности источников.

1. Название работы

Асимптотические методы математического моделирования физических процессов, описываемых уравнением реакции-адвекции-диффузии с разрывной функцией плотности источников.

2. Физические предпосылки

Уравнение реакции-адвекции-диффузии (РАД) описывает процессы, протекающие в различных физических, химических, биологических объектах. Начально-краевая задача для уравнения реакции-адвекции-диффузии на отрезке имеет вид

$$\begin{cases} \rho u_t = V u_x + (k(x)u_x)_x - f(u, x, t), \\ u(a, t) = u^{(a)}(t), t \geq t_0, u(b, t) = u^{(b)}(t), t \geq t_0, \\ u(x, t_0) = u^{(0)}(x), a < x < b. \end{cases}$$

(RAD)

Если уравнение РАД применяется для описания процесса диффузии некоторого вещества в движущейся среде, то $\rho(x)$ есть удельная емкость, $V(x)$ скорость переноса, $k(x)$ коэффициент диффузии, $f(u, x, t)$ плотность источников. Неизвестная функция $u(x, t)$ (которую будем дальше называть концентраций данного вещества) зависит от координат и времени и определяется тремя процессами. Реакция означает изменение (воз-

растание или убывание) концентрации за счет внешних источников данного вещества. Интенсивность источников зависит от концентрации, от координат, от времени, и, возможно, от концентрации других компонент, участвующих в реакции. Например, процесс распространения пожара в лесу описывается в простейшем приближении уравнением реакции-диффузии-адвекции, в котором u есть температура, k коэффициент радиационной диффузии, V скорость ветра. Для исследования задачи (RAD) мы используем асимптотический метод разложения решения в ряд по малому параметру, которым обычно является отношение толщины ВПС к диаметру области. Имеются многочисленные работы, в которых задача (RAD) исследуется численно и аналитически. Понятие контрастной структуры является одним из основных в математической теории нелинейных эволюционных уравнений, которые описывают такие процессы, как химические реакции в неоднородных средах, процессы динамики популяций в биологии и экологии, процессы горения и взрыва, генерацию магнитных полей в турбулентных средах и многие другие. Контрастные структуры появляются также как решения некоторых нелинейных волновых уравнений. Термин "Контрастная структура" (КС) применяют в тех случаях, когда

(1) решение задачи плавно зависит от координаты (или от координат в многомерном случае) в нескольких областях, называемых пятнами КС, расположенных внутри основной области,

(2) решение быстро изменяется на узких промежутках, разделяющих пятна КС (такие промежутки называются внутренними переходными слоями, ВПС).

Контрастные структуры могут быть статическими (в том случае, когда существует решение задачи типа КС, которое не зависит от времени) и динамическими (когда любое решение типа КС зависит от времени). Для статических КС основные математические проблемы сводятся к существованию, единственности и устойчивости решения, а также к построению функциональных рядов, в некотором смысле аппроксимирующих решение (так называемых асимптотических рядов). Положение динамических ВПС меняется со временем. Этот процесс называют дрейфом ВПС. Для динамических КС математические проблемы—существование, единственность, устойчивость, вычисление скорости дрейфа. Для динамических КС также важно построению асимптотических рядов, аппроксимирующих решение.

Рассматриваются одномерные и многомерные задачи, имеющие решения типа КС. Теория многомерных КС в настоящее время только создается.

Математические модели, приводящие к решениям типа КС, могут включать уравнение адвекции-реакции-диффузии, систему уравнений адвекции-реакции-диффузии, а также алгебраические уравнения, интегральные уравнения, интегро-дифференциальные уравнения в различных комбинациях.

В настоящее время происходит значимое расширение

МГУ им М.В.Ломоносова Физический факультет, каф. математики

Быков А.А. Методы компьютерной математики

1. Курсовые работы 1.1. Задачи реакции-адвекции-диффузии набора моделей, имеющих решения типа КС. Рассматриваются не только уравнения классических типов (параболические, гиперболические, эллиптические), но и значительно более сложные типы уравнений, например, так называемые псевдопараболические. Большое значение будет иметь в ближайшей перспективе исследование сильно нелинейных уравнений (таких, в которых старшие производные свходят в уравнение в виде некоторых нелинейных функций от них). В данной работе предполагается исследование задачи (RAD) в случае, когда некоторые параметры являются разрывными функциями. Это отличает данную работу от имеющихся в данной области математической физики.

3. Цель работы

Разработать методику исследования контрастных структур для уравнения реакции-диффузии-адвекции с разрывными параметрами методами асимптотического моделирования.

4. Научная новизна

Исследование начально-краевой задачи для уравнения реакции-диффузии-адвекции в случае, когда некоторые параметры являются разрывными функциями.

5. Компьютерное моделирование

Данная работа предполагает компьютерное моделирование в небольшом объеме с помощью одного из математических инструментов, таких как MatLab, MathCad, Mathematica, Maple.

6. Аналитическое моделирование

Основные результаты в данной работе будут получены аналитически, методом асимптотического разложения решения в ряд по степеням малого параметра. Метод асимптотического разложения включает построение формальной асимптотики, построение так называемых нижнего и верхнего решений, обоснование формальной асимптотики с помощью так называемого метода дифференциальных неравенств

7. Используемый математический аппарат

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений: асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы математической физики: постановка и основные свойства задачи Коши для уравнения теплопроводности. Для выполнения курсовой работы достаточно иметь понятие об обыкновенных дифференциальных уравнениях, постановка задачи Коши, постановка краевой задачи.

8. Возможности дальнейшего развития работы

Дипломная работа.