

1.1.4. Асимптотические методы моделирования процесса распространения импульсов в нервных волокнах

1. Название работы

Асимптотические методы моделирования процесса распространения импульсов в нервных волокнах

2. Физические предпосылки

Распространение импульсов в нервных волокнах описывается системой уравнений, которые называются уравнениями Ходжкина-Хаксли (Hodgkin–Huxley, HH). In 1963, Hodgkin with Huxley won the Nobel Prize in Physiology or Medicine for their work on the basis of nerve "action potentials". Мы не будем здесь выписывать систему HH, так как эта система достаточно громоздка и содержит, к тому же, значительное количество коэффициентов и функциональных зависимостей, полученных эмпирическим путем. Отметим только, что система уравнений HH является разновидностью системы уравнений реакции-адвекции-диффузии.

Уравнение реакции-адвекции-диффузии (РАД) описывает процессы, протекающие в различных физических, химических, биологических объектах. Начально-краевая задача для уравнения реакции-адвекции-диффузии на отрезке имеет вид

$$\begin{cases} \rho u_t = V u_x + (k(x)u_x)_x - f(u, x, t), \\ u(a, t) = u^{(a)}(t), t \geq t_0, u(b, t) = u^{(b)}(t), t \geq t_0, \\ u(x, t_0) = u^{(0)}(x), a < x < b. \end{cases}$$

(RAD)

Если уравнение РАД применяется для описания процесса диффузии некоторого вещества в движущейся среде, то $\rho(x)$ есть удельная емкость, $V(x)$ скорость переноса, $k(x)$ коэффициент диффузии, $f(u, x, t)$ плотность источников. Неизвестная функция $u(x, t)$ (которую будем дальше называть концентраций данного вещества) зависит от координат и времени и определяется тремя процессами. Реакция означает изменение (возрастание или убывание) концентрации за счет внешних источников данного вещества. Интенсивность источников зависит от концентрации, от координат, от времени, и, возможно, от концентрации других компонент, участвующих в реакции. Например, процесс распространения пожара в лесу описывается в простейшем приближении уравнением реакции-диффузии-адвекции, в котором u есть температура, k коэффициент радиационной диффузии, V скорость ветра. Для исследование задачи (RAD) мы используем асимптотический метод разложения решения в ряд по малому параметру, которым обычно является отношение толщины ВПС к диаметру области. Имеются многочисленные работы, в которых задача (RAD) исследуется численно и аналитически.

Распространяющийся в нервном волокне импульс можно рассматривать как нестационарную (движущуюся) контрастную структуру.

Понятие контрастной структуры является одним из основных в математической теории нелинейных эволюционных уравнений, которые описывают такие процессы,

МГУ им М.В.Ломоносова Физический факультет, каф. математики

Быков А.А. Методы компьютерной математики

1. Курсовые работы 1.1. Задачи реакции-адвекции-диффузии как химические реакции в неоднородных средах, процессы динамики популяций в биологии и экологии, процессы горения и взрыва, генерацию магнитных полей в турбулентных средах и многие другие. Контрастные структуры появляются также как решения некоторых нелинейных волновых уравнений. Термин "Контрастная структура" (КС) применяют в тех случаях, когда (1) решение задачи плавно зависит от координаты (или от координат в многомерном случае) в нескольких областях, называемых пятнами КС, расположенных внутри основной области,

(2) решение быстро изменяется на узких промежутках, разделяющих пятна КС (такие промежутки называются внутренними переходными слоями, ВПС).

Контрастные структуры могут быть статическими (в том случае, когда существует решение задачи типа КС, которое не зависит от времени) и динамическими (когда любое решение типа КС зависит от времени). Для статических КС основные математические проблемы сводятся к существованию, единственности и устойчивости решения, а также к построению функциональных рядов, в некотором смысле аппроксимирующих решение (так называемых асимптотических рядов). Положение динамических ВПС меняется со временем. Этот процесс называют дрейфом ВПС. Для динамических КС математические проблемы—существование, единственность, устойчивость, вычисление скорости дрейфа. Для динамических КС также важно построению асимптотических рядов, аппроксимирующих

Рассматриваются одномерные и многомерные задачи, имеющие решения типа КС. Теория многомерных КС в настоящее время только создается.

Математические модели, приводящие к решениям типа КС, могут включать уравнение адвекции-реакции-диффузии, систему уравнений адвекции-реакции-диффузии, а также алгебраические уравнения, интегральные уравнения, интегро-дифференциальные уравнения в различных комбинациях.

В настоящее время происходит значимое расширение набора моделей, имеющих решения типа КС. Рассматриваются не только уравнения классических типов (параболические, гиперболические, эллиптические), но и значительно более сложные типы уравнений, например, так называемые псевдопараболические. Большое значение будет иметь в ближайшей перспективе исследование сильно нелинейных уравнений (таких, в которых старшие производные сходят в уравнение в виде некоторых нелинейных функций от них).

3. Цель работы

Применить методы асимптотического моделирования, разработанные для уравнения РАД, для моделирования распространения нервного импульса. Исследовать существование и единственность решения, устойчивость решения по отношению к малому возмущению параметров.

4. Научная новизна

В этой работе будет впервые дано строгое обоснование существования и устойчивости решения системы уравнений НН типа бегущей волны с использованием асимптотических методов математического моделирования.

5. Компьютерное моделирование

Данная курсовая работа не предполагает значительного объема работ в области компьютерного моделирования. Для выполнения курсовой работы достаточно знать основные приемы работы с математическим инструментом. Можно использовать MatLab, Mathematica, MathCad, Maple

6. Аналитическое моделирование

Для выполнения курсовой работы потребуется знание основных понятий теории матриц, линейная однородная система, алгебраическая проблема собственных значений, собственные векторы. Желательно понимание общего решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, постановка задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

7. Используемый математический аппарат

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений: асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы математической физики: постановка и основные свойства задачи Коши для уравнения теплопроводности. Для выполнения курсовой работы достаточно иметь понятие об обыкновенных дифференциальных уравнениях.

МГУ им М.В.Ломоносова Физический факультет, каф. математики

Быков А.А. Методы компьютерной математики

1. Курсовые работы 1.1. Задачи реакции-адвекции-диффузии
новенных дифференциальных уравнениях, постановка
задачи Коши, постановка краевой задачи.

8. Возможности дальнейшего развития работы

Возможно дальнейшее развитие данной работы в направлении аналитического исследования решения системы дифференциальных уравнений в частных производных методом асимптотического разложения решения в ряд по степеням малого параметра. Метод асимптотического разложения включает построение формальной асимптоитики, построение так называемых нижнего и верхнего решений, обоснование формальной асимптоитики с помощью так называемого метода дифференциальных неравенств.

Дипломная работа