

1.1.5. Компьютерное моделирование процесса расщепления фронта контрастной структуры

1. Название работы

Компьютерное моделирование процесса расщепления фронта контрастной структуры.

2. Физические предпосылки

Понятие контрастной структуры является одним из основных в математической теории нелинейных эволюционных уравнений, которые описывают такие процессы, как химические реакции в неоднородных средах, процессы динамики популяций в биологии и экологии, процессы горения и взрыва, генерацию магнитных полей в турбулентных средах и многие другие. Контрастные структуры появляются также как решения некоторых нелинейных волновых уравнений. Термин "Контрастная структура" (КС) применяют в тех случаях, когда (1) решение задачи плавно зависит от координаты (или от координат в многомерном случае) в нескольких областях, называемых пятнами КС, расположенных внутри основной области,

(2) решение быстро изменяется на узких промежутках, разделяющих пятна КС (такие промежутки называются внутренними переходными слоями, ВПС).

Контрастные структуры могут быть статическими (в том случае, когда существует решение задачи типа КС, которое не зависит от времени) и динамическими (когда любое решение типа КС зависит от времени). Для статических КС основные математические проблемы

1. Курсовые работы 1.1. Задачи реакции-адвекции-диффузии сводятся к существованию, единственности и устойчивости решения, а также к построению функциональных рядов, в некотором смысле аппроксимирующих решение (так называемых асимптотических рядов). Положение динамических ВПС меняется со временем. Этот процесс называют дрейфом ВПС. Для динамических КС математические проблемы—существование, единственность, устойчивость, вычисление скорости дрейфа. Для динамических КС также важно построению асимптотических рядов, аппроксимирующих решение.

Рассматриваются одномерные и многомерные задачи, имеющие решения типа КС. Теория многомерных КС в настоящее время только создается.

Математические модели, приводящие к решениям типа КС, могут включать уравнение адвекции-реакции-диффузии, систему уравнений адвекции-реакции-диффузии, а также алгебраические уравнения, интегральные уравнения, интегро-дифференциальные уравнения в различных комбинациях.

В настоящее время происходит значимое расширение набора моделей, имеющих решения типа КС. Рассматриваются не только уравнения классических типов (параболические, гиперболические, эллиптические), но и значительно более сложные типы уравнений, например, так называемые псевдопараболические. Большое значение будет иметь в ближайшей перспективе исследование сильно нелинейных уравнений (таких, в которых старшие производные свходят в

уравнение в виде некоторых нелинейных функций от них).

Уравнение реакции-адвекции-диффузии (РАД) описывает процессы, протекающие в различных физических, химических, биологических объектах. Начально-краевая задача для уравнения реакции-адвекции-диффузии на отрезке имеет вид

$$\begin{cases} \rho u_t = V u_x + (k(x)u_x)_x - f(u, x, t), \\ u(a, t) = u^{(a)}(t), t \geq t_0, u(b, t) = u^{(b)}(t), t \geq t_0, \\ u(x, t_0) = u^{(0)}(x), a < x < b. \end{cases}$$

(RAD)

Если уравнение РАД применяется для описания процесса диффузии некоторого вещества в движущейся среде, то $\rho(x)$ есть удельная емкость, $V(x)$ скорость переноса, $k(x)$ коэффициент диффузии, $f(u, x, t)$ плотность источников. Неизвестная функция $u(x, t)$ (которую будем дальше называть концентраций данного вещества) зависит от координат и времени и определяется тремя процессами. Реакция означает изменение (возрастание или убывание) концентрации за счет внешних источников данного вещества. Интенсивность источников зависит от концентрации, от координат, от времени, и, возможно, от концентрации других компонент, участвующих в реакции. Например, процесс распространения пожара в лесу описывается в простейшем приближении уравнением реакции-диффузии-адвекции, в котором u есть температура, k коэффициент радиационной диффузии, V скорость ветра. Для исследование

задачи (RAD) мы используем асимптотический метод разложения решения в ряд по малому параметру, которым обычно является отношение толщины ВПС к диаметру области. Имеются многочисленные работы, в которых задача (RAD) исследуется численно и аналитически.

Мы рассматриваем такую комбинацию параметров задачи (RAD), при которой решение этой задачи имеет вид контрастной структуры (КС). Понятие контрастной структуры является одним из основных в математической теории нелинейных эволюционных уравнений, которые описывают такие процессы, как химические реакции в неоднородных средах, процессы динамики популяций в биологии и экологии, процессы горения и взрыва, генерацию магнитных полей в турбулентных средах и многие другие. Контрастные структуры появляются также как решения некоторых нелинейных волновых уравнений. Термин "Контрастная структура" (КС) применяют в тех случаях, когда

(1) решение задачи плавно зависит от координаты (или от координат в многомерном случае) в нескольких областях, называемых пятнами КС, расположенных внутри основной области,

(2) решение быстро изменяется на узких промежутках, разделяющих пятна КС (такие промежутки называются внутренними переходными слоями, ВПС).

Контрастные структуры могут быть статическими (в том случае, когда существует решение задачи типа КС, которое не зависит от времени) и динамическими (ко-

гда любое решение типа КС зависит от времени). Для статических КС основные математические проблемы сводятся к существованию, единственности и устойчивости решения, а также к построению функциональных рядов, в некотором смысле аппроксимирующих решение (так называемых асимптотических рядов). Положение динамических ВПС меняется со временем. Этот процесс называют дрейфом ВПС. Для динамических КС математические проблемы—существование, единственность, устойчивость, вычисление скорости дрейфа. Для динамических КС также важно построению асимптотических рядов, аппроксимирующих решение.

Рассматриваются одномерные и многомерные задачи, имеющие решения типа КС. Теория многомерных КС в настоящее время только создается.

Математические модели, приводящие к решениям типа КС, могут включать уравнение адвекции-реакции-диффузии, систему уравнений адвекции-реакции-диффузии, а также алгебраические уравнения, интегральные уравнения, интегро-дифференциальные уравнения в различных комбинациях.

В настоящее время происходит значимое расширение набора моделей, имеющих решения типа КС. Рассматриваются не только уравнения классических типов (параболические, гиперболические, эллиптические), но и значительно более сложные типы уравнений, например, так называемые псевдопараболические. Большое значение будет иметь в ближайшей пер-

1. Курсовые работы 1.1. Задачи реакции-адвекции-диффузии
спективе исследование сильно нелинейных уравнений
(таких, в которых старшие производные чсвходят в уравнение в виде некоторых нелинейных функций от них).

В данной работе мы исследуем процесс расщепления фронта контрастной структуры в неоднородной среде. Этот процесс описывает ситуацию, при которой фронт контрастной структуры в процессе дрейфа меняет свою конфигурацию и расщепляется на два или большее число изолированных фронтов, которые далее дрейфуют с различной скоростью. Такая ситуация возникает, например, в процессе пространственного распространения популяции связанных биологических объектов при достижении области с существенно различными свойствами в отношении различных биологических компонент. Расщепление фронта КС наблюдается также в некоторых моделях туннельного эффекта в полупроводниковых слоистых структурах.

3. Цель работы

Получить в рамках компьютерной модели результат, иллюстрирующий возможность расщепления фронта КС в неоднородной среде.

4. Научная новизна

Расщепление фронта КС в неоднородной среде ранее не было описано в научной литературе.

5. Компьютерное моделирование

Выполнение дипломной работы предполагает компьютерное моделирование в значительном объеме с

МГУ им М.В.Ломоносова Физический факультет, каф. математики

Быков А.А. Методы компьютерной математики

1. Курсовые работы 1.1. Задачи реакции-адвекции-диффузии ~~помощью языка программирования высокого уровня~~ (например, C++), а также одного из математических инструментов, таких как MatLab, MathCad, Mathematica, Maple. Возможно также ограничиться только использованием математического инструмента

6. Аналитическое моделирование

Возможно дальнейшее развитие данной работы в направлении аналитического исследования решения системы дифференциальных уравнений в частных производных методом асимптотического разложения решения в ряд по степеням малого параметра. Метод асимптотического разложения включает построение формальной асимптоитики, построение так называемых нижнего и верхнего решений, обоснование формальной асимптоитики с помощью так называемого метода дифференциальных неравенств

7. Используемый математический аппарат

Компьютерная модель основана на численном методе решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для выполнения курсовой работы достаточно знать основные приемы работы с математическим инструментом. Можно использовать MatLab, Mathematica, MathCad, Maple.

8. Возможности дальнейшего развития работы

Дипломная работа.